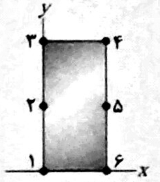
●۱- چون g در پهنهٔ بیشتر ساختارها مقدار بسیار کمی تغییر می‌کند، گرانیگاه ساختار اصولاً بر مرکز جرم آن منطبق است. اینجا در یک مثال ساختگی تغییرات g خیلی زیاد است. شکل ۱۲-۲۴ آرایشی از ۶ ذره را نشان می‌دهد که هر یک دارای جرم m است و در گوشه‌های یک ساختار با جرم ناچیز قرار دارند. فاصلهٔ میان ذره‌های مجاور در امتداد اضلاع برابر ۲/۰۰ m است. جدول زیر مقدار g (m/s²) را در محل هر یک از ذره‌ها نشان می‌دهد. با به کار بردن دستگاه مختصات نشان داده شده، مطلوب است تعیین (الف) مختصهٔ x مرکز جرم و (ب) مختصهٔ y مرکز جرم دستگاه شش- ذره. سپس تعیین (پ) مختصهٔ x مرکز گرانش و (ت) مختصهٔ y گرانیگاه دستگاه شش- ذره.



شکل ۱۲-۲۴ مسئله ۱

ذره	g	ذره	g
۱	۸/۰۰	۴	۷/۴۰
۲	۷/۸۰	۵	۷/۶۰
۳	۷/۶۰	۶	۷/۸۰

حل: (الف)
$$x_{com}=\frac{۰+۰+۰+(m)(۲)+(m)(۲)+(m)(۲)}{۶m}=۱\text{m}$$

(ب)
$$y_{com}=\frac{۰+(m)(۲)+(m)(۴)+(m)(۴)+(m)(۴)+۰}{۶m}=۲\text{m}$$

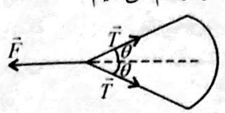
(پ) با توجه به اینکه شتاب گرانشی در مکان‌های مختلف در اینجا متفاوت است لذا خواهیم داشت

$$x_{cog}=\frac{\sum m_i g_i x_i}{\sum m_i g_i}=\frac{m[۰+۰+۰+(۷/۴)(۲)+(۷/۶)(۲)+(۷/۸)(۲)]}{m(۸+۷/۸+۷/۶+۷/۴+۷/۶+۷/۸)}=۰/۹۸۷\text{m}$$

$$y_{cog}=\frac{\sum m_i g_i y_i}{\sum m_i g_i}=\frac{m[۰+(۷/۸)(۲)+(۷/۶)(۴)+(۷/۴)(۴)+(۷/۶)(۲)+۰]}{m(۸+۷/۸+۷/۶+۷/۴+۷/۶+۷/۸)}=۱/۹۷\text{m}$$

●۲- زه کمانی را از وسط آنقدر می‌کشیم تا کشش زه آن برابر نیروی وارده شود. زاویهٔ بین دو نیمهٔ زه چقدر است؟

حل: نمودار نیروها را رسم می‌کنیم.



$$F=۲T\cos\theta \qquad \cos\theta=\frac{F}{۲T}$$

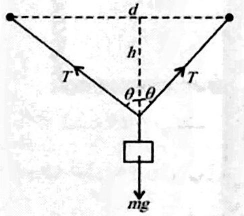
اما $F=T$ است لذا خواهیم داشت

$$\cos\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۶۰°$$

و زاویه بین دو رشته زه کمان ۱۲۰° است.

●۳- طنابی با جرم ناچیز را بین دو پایه که ۳/۴۴ mm از هم فاصله دارند به طور افقی می‌کشیم. وقتی جسمی به وزن ۳۱۶۰ N از وسط طناب آویزان شود، مشاهده می‌کنیم که طناب به اندازهٔ ۳۵/۰cm پایین کشیده می‌شود. کشش در طناب چقدر است؟ **ILW**

حل: نمودار جسم- آزاد را رسم می‌کنیم



$$d=۳/۴۴\text{m} \qquad h=۰/۳۵\text{m}$$

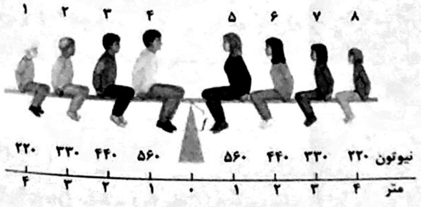
$$\tan\theta=\frac{d/۲}{h}=\frac{۳/۴۴}{(۲)(۰/۳۵)}=۴/۹۱\Rightarrow\theta=۷۸/۵°$$

از شرط تعادل نیروها داریم

$$۲T\cos\theta=mg$$

$$(۲)(T)(\cos ۷۸/۵°)=۳۱۶۰\Rightarrow T=۷۹۲۵\text{N}$$

●۴- هشت عضو یک خانواده، که وزنهایشان برحسب نیوتون در شکل ۱۲-۲۵ مشخص شده است، روی یک الاکلنگ به حال تعادل نشسته‌اند. شمارهٔ شخصی که بیشترین گشتاور نیرو را نسبت به محور چرخش در نقطهٔ اتکای f در جهت (الف) خارج صفحهٔ کتاب، و (ب) داخل صفحهٔ کتاب ایجاد می‌کند چیست؟



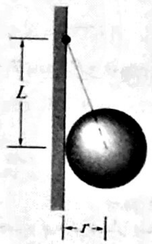
شکل ۱۲-۲۵ مسئله ۴

حل: با توجه به رابطهٔ $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$ اشخاصی که در سمت چپ نشسته‌اند گشتاور نیروی رو به خارج و اشخاصی که در سمت راست نشسته‌اند گشتاور نیروی رو به داخل صفحه ایجاد می‌کنند.

(الف) برای اشخاصی که سمت چپ نشسته‌اند بزرگترین مقدار گشتاور نیرو مربوط به شخص ۲ است که برابر است با $(۳)(۳۳۰)=۹۹۰\text{N}\cdot\text{m}$.

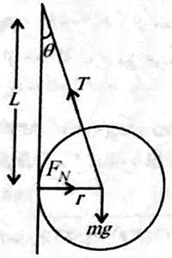
(ب) برای اشخاصی که به سمت راست نشسته‌اند بزرگترین مقدار گشتاور نیرو مربوط به شخص ۷ است که برابر است با $(۳)(۳۳۰)=۹۹۰\text{N}\cdot\text{m}$.

●۵- در شکل ۱۲-۲۶ کرهٔ یکنواختی به جرم m=۰/۸۵kg و شعاع r=۴/۲cm به وسیلهٔ طنابی به جرم ناچیز به دیوار بدون اصطکاکی در فاصلهٔ L=۸/۰cm بالاتر از مرکز کره، متصل است. مطلوب است تعیین (الف) نیروی کشش در طناب و (ب) نیروی وارد بر کره از طرف دیوار. **SSM WWW**



شکل ۱۲-۲۶ مسئله ۵

حل: نیروهای وارد بر کره را رسم می‌کنیم.



شرط تعادل را می‌نویسیم

$$F_N-T\sin\theta=۰ \qquad F_N=T\sin\theta$$

$$T\cos\theta-mg=۰ \qquad mg=T\cos\theta$$

با توجه به شکل $\cos\theta=\frac{L}{\sqrt{L^۲+r^۲}}$ و $\sin\theta=\frac{r}{\sqrt{L^۲+r^۲}}$ و از معادله دوم می‌توان T را حساب کرد

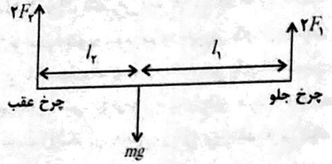
$$T=\frac{mg\sqrt{L^۲+r^۲}}{L}=\frac{(۰/۸۵)(۹/۸)\sqrt{(۰/۰۸)^۲+(۰/۰۴۲)^۲}}{۰/۰۸}=۹/۴\text{N}$$

(ب) از معادلهٔ اول نیز می‌توان F_N را به دست آورد

$$F_N=\frac{Tr}{\sqrt{L^۲+r^۲}}=\frac{(۹/۴)(۰/۰۴۲)}{\sqrt{(۰/۰۸)^۲+(۰/۰۴۲)^۲}}=۴/۴\text{N}$$

●۶- فاصلهٔ دو محور چرخهای جلو و عقب اتومبیلی به جرم ۱۳۶۰kg برابر ۳/۰۵m است. گرانیگاه اتومبیل در فاصلهٔ ۱/۷۸m پشت محور جلو قرار دارد. اگر اتومبیل روی سطح زمینی افقی قرار داشته باشد، مطلوب است بزرگی نیروی وارد از طرف زمین به (الف) هر یک از چرخهای جلو (با فرض یکسان بودن) و (ب) هر یک از چرخهای عقب (با فرض یکسان بودن).

حل:



(الف) مجموعه در حال تعادل است. شرط تعادل دورانی را حول چرخ عقب می‌نویسیم

$$(۲F_۱)(l_۱+l_۲)-mgl_۲=۰$$

$$۲F_۱(۳/۰۵)-(۱۳۶۰)(۹/۸)(۳/۰۵-۱/۷۸)=۰$$

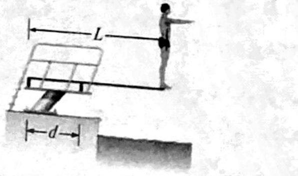
$$F_۱=۲۷۷۵\text{N}$$

(ب) از شرط تعادل انتقالی نیز می‌توان $F_۲$ را به دست آورد

$$۲F_۱+۲F_۲=mg$$

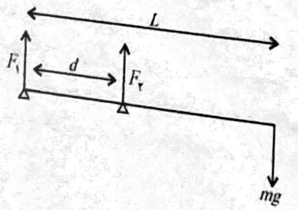
$$۲(۲۷۷۵)+۲F_۲=(۱۳۶۰)(۹/۸)\Rightarrow F_۲=۳۸۸۹\text{N}$$

●۷- شیرجه رونده‌ای به وزن ۵۸۰N در انتهای تخته شیرجه‌ای به طول L = ۴/۵ m و جرم ناچیز ایستاده است (شکل ۱۲-۲۷). تخته شیرجه به دو پایه به فاصلهٔ d=۱/۵m از یکدیگر، متصل شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین) نیروی وارد بر تخته از پایه چپ و (پ) بزرگی و (ت) جهت (بالا یا پایین) نیروی وارد بر تخته از پایهٔ راست چقدر است؟ (ث) کدام پایهٔ (چپ یا راست) تحت کشش است و (ج) کدام پایه متراکم می‌شود؟ **SSM**



شکل ۱۲-۲۷ مسئله ۷

حل:



(الـف) برایند گشتاور نیروها را حول پایهٔ سمت راست می‌نویسیم

$F_1d + mg(L-d) = ۰$

$F_1(۱/۵)+(۵۸۰)(۴/۵-۱/۵)=۰ \Rightarrow F_1 = -۱۱۶۰\,N$

(ب) علامت منفی نشان می‌دهد که F_1 رو به پایین است.

(پ) برایند نیروها را می‌نویسیم $F_1+F_2-mg=۰$

$-۱۱۶۰+F_2-۵۸۰=۰$ $\quad F_2=۱۷۴۰\,N$

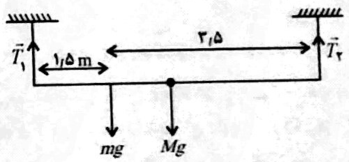
(ت) علامت مثبت نشان می‌دهد که F_2 رو به بالا است.

(ث) با توجه به قانون سوم نیوتون نیروی وارد از طرف تختهٔ شیرجه بر پایهٔ سمت چپ رو به بالا و این پایه کشیده می‌شود.

(ج) طبق قانون سوم نیوتون نیروی وارد از طرف تختهٔ شیرجه بر پایهٔ سمت راست رو به پایین و این پایه فشرده می‌شود.

●۸- چوب بستی به جرم ۶۰kg و طول ۵/۰m به وسیلهٔ دو کابل قائم که به دو انتهای آن بسته شده در وضعیت افقی قرار دارد. شیشه پاک‌کنی به جرم ۸۰kg در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۱/۵ m از یک انتهای چوب بست ایستاده است. نیروی کشش در (الف) کابل نزدیکتر و (ب) در کابل دورتر چقدر است؟

حل:



(الـف) شرط تعادل دورانی حول انتهای سمت راست می‌نویسیم.

$T_1(۵)-Mg(۳/۵)-mg(۲/۵)=۰$

$T_1(۵)-(۸۰)(۹/۸)(۳/۵)-(۶۰)(۹/۸)(۲/۵)=۰$

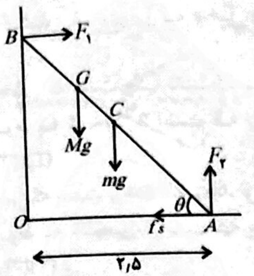
$T_1=۸۴۳\,N$

(ب) برایند نیروها را می‌نویسیم $T_1+T_2-Mg-mg=۰$

$۸۴۳+T_2-(۸۰)(۹/۸)-(۶۰)(۹/۸)=۰$ $\quad T_2=۵۲۹\,N$

●۹- یک کارگر شیشه پاک‌کن به جرم ۷۵kg از نردبانی به جرم ۱۰kg و طول ۵/۰m استفاده می‌کند. او سر پایین نردبان را به فاصلهٔ ۲/۵ m از دیوار قرار می‌دهد و سربالایی آن را به یک شیشهٔ ترک خورده تکیه می‌دهد و از نردبان بالا می‌رود. وقتی او به اندازهٔ ۳/۰m از نردبان بالا برود شیشه می‌شکند. با چشمپوشی از اصطکاک میان نردبان و شیشه و با این فرض که پایین نردبان نمی‌لغزد، وقتی شیشه در آستانهٔ شکستن است مطلوب است (الف) بزرگی نیروی وارد به شیشه از طرف نردبان، (ب) بزرگی نیروی وارد بر نردبان از طرف زمین و (پ) زاویهٔ (نسبت به افق) نیرویی که بر نردبان وارد می‌شود.

حل:



$l = AG = ۳m$ $\quad L=۵m$

$d=۲/۵\,m$ $\quad M=۷۵kg$

$m=۱۰kg$

$\cos\theta = \frac{d}{L} = \frac{۲/۵}{۵} = ۰/۵ \Rightarrow \theta = ۶۰°$

(الف) شرط تعادل دورانی را برای گشتاور نیروها حول A پای نردبان می‌نویسیم

$Mgl\cos\theta + mg\left(\frac{L}{۲}\right)\cos\theta - F_1L\sin\theta = ۰$

$\Rightarrow F_1 = \frac{(Ml+mL/۲)g\cos\theta}{L\sin\theta}$

که با قرار دادن مقادیر داده شده و $\theta=۶۰°$ خواهیم داشت $F_1=۲۸۳N$.

این نیرویی است که پنجره به نردبان به سمت بیرون وارد می‌کند و طبق قانون سوم نیوتون نیروی وارد از نردبان به پنجره دارای بزرگی یکسان و رو به داخل وارد می‌شود.

(ب) شرط تعادل انتقالی نیروها در نظر می‌گیریم که عبارتند از $F_1-f_s=۰$ و $F_2-Mg-mg=۰$. از معادله اول داریم $f_s=F_1=۲۸۳\,N$ و از معادلهٔ دوم نیز می‌توان F_2 را به دست آورد

$F_2=(M+m)g=(۷۵+۱۰)(۹/۸)=۸۳۳\,N$

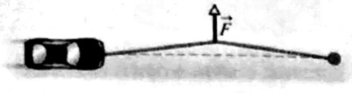
بزرگی نیرویی که از طرف زمین بر نردبان وارد می‌شود برابر است با

$F=\sqrt{f_s^2+F_2^2}=\sqrt{(۲۸۳)^2+(۸۳۳)^2}=۸۸۰N$

(پ) زاویه‌ای که این نیرو با افق می‌سازد را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد

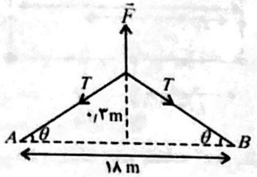
$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{F_2}{f_s}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{۸۳۳}{۲۸۳}\right)=۷۱/۲°$

●۱۰- در شکل ۱۲-۲۸ مردی تلاش می‌کند تا اتومبیلش را از گل و لای کنار جاده بیرون بیاورد. او یک سرطنابی را به سپر جلوی اتومبیل و سر دیگر آن را به تیری که کنار جاده در فاصلهٔ ۱۸ m قرار دارد، محکم می‌بندد. سپس، طناب را از وسط با نیروی ۵۵۰N به یک طرف می‌کشد و در نتیجه مرکز طناب از وضع قبلی خود به اندازهٔ ۰/۳۰m جابه جا می‌شود و اتومبیل کمی حرکت می‌کند. بزرگی نیرویی که طناب به اتومبیل وارد کرده چقدر است؟ (طناب یک کمی کش می‌آید.)



شکل ۱۲-۲۸ مسئلهٔ ۱۰

حل: $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{۰/۳}{۹}\right)=۱/۹°$



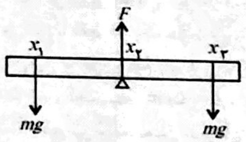
شرط تعادل نیروها را می‌نویسیم

$F-۲T\sin\theta=۰$

$۵۵۰-۲T\sin۱/۹°=۰\Rightarrow T=۸۳۳۸N$

●۱۱- یک خط‌کش چوبی یک متری در نشانهٔ ۵۰/۰cm به طور افقی روی لبهٔ چاقویی در حال تعادل است. با قراردادن دو سکه ۵/۰۰g روی نشانهٔ ۱۲/۰cm، مشاهده می‌کنیم که خط‌کش در نشانهٔ ۴۵/۵ cm به حال تعادل در می‌آید. جرم خط‌کش چقدر است؟ SSM

حل:



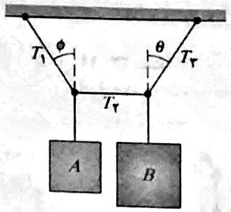
برایند گشتاور نیروها حول نقطهٔ اتکا صفر است.

$Mg(x_3-x_2)-mg(x_2-x_1)=۰$

$M(۵۰-۴۵/۵)-۲\times۵\times۱۰^{-۳}\,(۴۵/۵-۱۲)=۰$

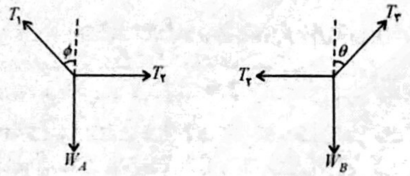
$\Rightarrow M=۷۴/۴\times۱۰^{-۳}\,kg$

●۱۲- دستگاه شکل ۱۲-۲۹ در حال تعادل است و ریسمان میانی کاملاً افقی است. وزن جسم B ۵۰N و زاویهٔ ϕ برابر ۳۵° و وزن جسم A ۴۰N است. مطلوب است تعیین (الف) نیروی کشش T_1، (ب) نیروی کشش T_2، (پ) نیروی کشش T_3 و (ت) زاویهٔ θ. GO



شکل ۱۲-۲۹ مسئلهٔ ۱۲

حل: نمودار جسم- آزاد را رسم می‌کنیم



(الف) برای کرهٔ سمت چپ شرط تعادل انتقالی نیروها را در امتداد محور y در نظر می‌گیریم

$T_1\cos\phi=W_A\Rightarrow T_1=\frac{W_A}{\cos\phi}=\frac{۴۰N}{\cos۳۵°}\Rightarrow T_1=۴۸/۸۳N$

(ب) شرط تعادل انتقالی نیروها برای کرهٔ سمت چپ در امتداد محور x در نظر می‌گیریم

$T_2-T_1\sin\phi=۰$ $\quad T_2=T_1\sin\phi=(۴۸/۸۳)\sin۳۵°=۲۸N$

(پ) حال شرط تعادلی انتقالی نیروها را برای کرهٔ سمت راست می‌نویسیم

$T_{3,x}=T_2=۲۸N$

$T_{3,y}=W_B=۵۰N$

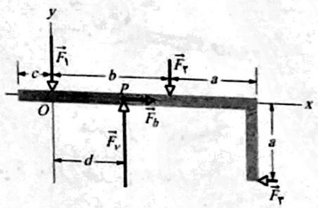
در نتیجه بزرگی T_3 برابر است با

$T_3=\sqrt{T_{3,x}^2+T_{3,y}^2}=\sqrt{(۲۸)^2+(۵۰)^2}=۵۷/۳N$

(ت) زاویهٔ θ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{T_{3,x}}{T_{3,y}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{۲۸}{۵۰}\right)\Rightarrow\theta=۲۹/۲°$

●۱۳- نیروهای $\vec F_1$ ، $\vec F_2$ و $\vec F_3$ به ساختار شکل ۱۲-۳۰ که دید از بالای آن نشان داده شده است، وارد می‌شوند. می‌خواهیم با واردکردن یک نیروی چهارم با مؤلفه‌های F_h و F_v در نقطه‌ای مانند P ساختار را به حال تعادل درآوریم. می‌دانیم که $a=۲/۰m$ ، $b=۳/۰m$ ، $c=۱/۰m$ ، $F_1=۲۰N$ و $F_2=۱۰N$ و $F_3=۵/۰N$. مطلوب است تعیین (الف) F_h، (ب) F_v و (پ) d. ILW



شکل ۱۲-۳۰ مسئلهٔ ۱۳

حل: (الف) شرط تعادل انتقالی نیروها را می‌نویسیم. برای محور x داریم.

$F_h-F_3=۰\Rightarrow F_h=F_3=۵N$

(ب) برای محور y داریم

$F_v-F_1-F_2=۰\Rightarrow F_v=F_1+F_2=۲۰+۱۰=۳۰N$

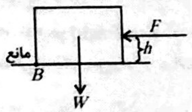
(پ) شرط تعادل دورانی گشتاور نیروها را نقطهٔ P در نظر می‌گیریم. با این انتخاب گشتاور نیروی دو تا از نیروها حذف می‌شود.

$$F_۱d - F_۲(b-d) - F_۲a = ۰ \Rightarrow d = \frac{F_۲a + F_۲b}{F_۱ + F_۲}$$

$$d = \frac{(۵)(۲)+(۱۰)(۳)}{۲۰+۱۰} = ۱/۳۳\,\mathrm{m}$$

●۱۴- صندوق مکعب شکل یکنواختی که طول هر ضلعش $۰/۷۵۰\,\mathrm{m}$ است $۵۰۰\,\mathrm{N}$ وزن دارد. این صندوق روی کف اتاق واقع است و مانع بسیار کوچکی در مقابلش قرار دارد. کمترین ارتفاع از کف اتاق که باید یک نیروی $۳۵۰\,\mathrm{N}$ به صندوق وارد شود تا آن صندوق روی نوک مانع در آستانهٔ بلند شدن قرار گیرد، چقدر است؟

حل:

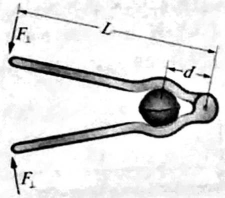


شرط اینکه نیروی F جسم را در آستانه حرکت قرار داده و آن را از زمین بلند کند این است که برایند گشتاور نیروها حول نقطهٔ A محل مانع صفر باشد

$$Fh - W\frac{a}{۲} = ۰ \qquad (۳۵۰)h - (۵۰۰)\left(\frac{۰/۷۵}{۲}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow h = ۰/۵۴\,\mathrm{m}$$

●۱۵- برای شکستن گردویی کمترین نیرویی که باید به دو طرف پوستهٔ گردو وارد شود برابر $۴۰\,\mathrm{N}$ است. برای گردوشکن شکل ۱۲-۳۱ با $L = ۱۲\,\mathrm{cm}$ و $d = ۲/۶\,\mathrm{cm}$، مؤلفه‌های نیروی $F_\perp$ (عمود بر دسته‌ها) مربوط به آن $۴۰\,\mathrm{N}$ چقدر است؟



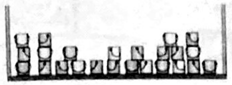
شکل ۱۲-۳۱ مسئلهٔ ۱۵

حل: از شرط تعادلی دورانی داریم

$$F_\perp L = Fd \Rightarrow F_\perp = F\frac{d}{L}$$

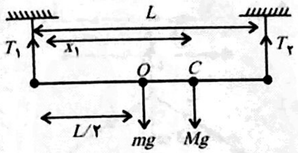
$$F_\perp = (۴۰)\left(\frac{۲/۶}{۱۲}\right) = ۸/۶۶\,\mathrm{N}$$

●۱۶- در شکل ۱۲-۳۲ یک چوب بست افقی به طول $۲/۰۰\,\mathrm{m}$ و جرم یکنواخت $۵۰/۰\,\mathrm{kg}$ به وسیلهٔ دو کابل از ساختمانی آویزان است. یک دو جین قوطی رنگ در نقطه‌های مختلف روی آن قرار دارند. جرم کل قوطیهای رنگ $۷۵/۰\,\mathrm{kg}$ است. نیروی کشش در کابل سمت راست برابر $۷۲۲\,\mathrm{N}$ است. در چه فاصلهٔ افقی از این کابل مرکز جرم دستگاه قوطیهای رنگ قرار دارد؟



شکل ۱۲-۳۲ مسئلهٔ ۱۶

حل:



مرکز جرم قوطی‌های رنگ را در نقطه C در نظر می‌گیریم.
شرط تعادل دورانی را حول محور سمت چپ در نظر می‌گیریم

$$T_۲L - mg\left(\frac{L}{۲}\right) - Mg\,x_۱ = ۰$$

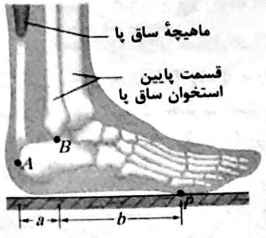
$$(۷۲۲)(۲) - (۵۰)(۹/۸)(۱) - (۷۵)(۹/۸)\,x_۱ = ۰$$

$$x_۱ = ۱/۳\,\mathrm{m}$$

اما محل مرکز جرم از محور سمت راست مورد سؤال است لذا داریم

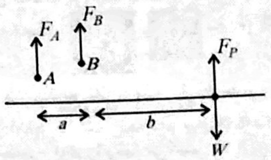
$$x_۲ = L - x_۱ = ۲ - ۱/۳ = ۰/۷\,\mathrm{m}$$

●۱۷- شکل ۱۲-۳۳ ساختار تشریحی ساق و کف پا را نشان می‌دهد که وقتی شخص روی پنجهٔ پا ایستاده است و پاشنهٔ پا را از زمین بلند می‌کند پا فقط در یک نقطه مانند P که در شکل نشان داده شده با زمین به طور مؤثر تماس دارد. فرض کنید فاصلهٔ $a = ۵/۰\,\mathrm{cm}$، فاصلهٔ $b = ۱۵\,\mathrm{cm}$ و وزن شخص $W = ۹۰۰\,\mathrm{N}$ باشد. مطلوب است تعیین نیروهایی که بر پا وارد می‌شوند (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین) نیرو در نقطهٔ A از ماهیچهٔ ساق پا و (پ) بزرگی و (ت) جهت (بالا یا پایین) نیرو در نقطهٔ B از قسمت پایین استخوان ساق پا.



شکل ۱۲-۳۳ مسئلهٔ ۱۷

حل:



(الف) شرط تعادل دورانی نیروها را حول نقطهٔ B در نظر می‌گیریم

$$bF_p - aF_A = ۰ \qquad F_A = \frac{bF_p}{a}$$

$$F_A = \frac{bW}{a} = \frac{(۱۵)(۹۰۰)}{۵} = ۲۷۰۰\,\mathrm{N}$$

(ب) چون نتیجهٔ به دست آمده مثبت است لذا جهت F_A به طرف بالاست.

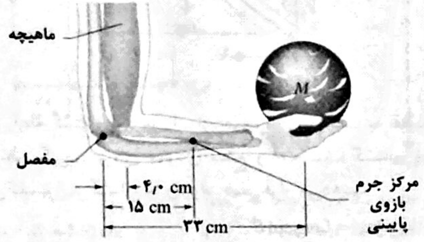
(پ) از شرط تعادل انتقالی نیروها می‌توان نوشت

$$F_A + F_B + F_P = ۰ \Rightarrow F_B = -F_A - F_P$$

$$F_B = -۲۷۰۰ - ۹۰۰ = -۳۶۰۰\,\mathrm{N}$$

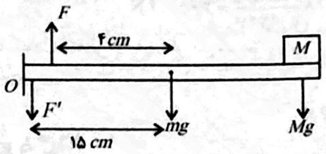
(ت) چون نتیجهٔ به دست آمده منفی است لذا جهت F_B به طرف پایین است.

●۱۸- بازیکنی توپ بولینگ $(M = ۷/۲\,\mathrm{kg})$ را در کف دست خود نگهداشته است (شکل ۱۲-۳۴). قسمت بالایی بازوی او به طور قائم و قسمت پایینی بازو $(۱/۸\,\mathrm{kg})$ به صورت افقی قرار دارد. بزرگی (الف) نیروی ماهیچه قسمت بالایی بازو وارد بر قسمت پایینی و (ب) نیروی بین استخوانها در نقطهٔ مفصل، چقدر است؟



شکل ۱۲-۳۴ مسئلهٔ ۱۸

حل: (الف) به جای دست، دیاگرام زیر را در نظر می‌گیریم.



کلیهٔ نیروها و گشتاور نیروها را با صفر برابر قرار می‌دهیم. F' نیروی بین استخوان‌هاست.

ابتدا نیروها: $F = (m+M)g + F'$

اکنون گشتاور نیروها نسبت به مفصل O:

$$F \times (۰/۱۱) = mg \times ۰/۱۵ + Mg \times ۰/۳۳$$

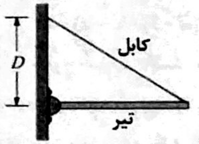
$$۰/۱۱F = ۲/۶۴۶ + ۲۳/۲۸۵ = ۲۵/۹۳۱$$

$$F = ۲۳۵/۷۳۶\,\mathrm{N}$$

(ب) نیروی بین استخوان‌ها برابر است با:

$$F' = F - (m+M)g = ۱۴۷/۵۳۶\,\mathrm{N}$$

●۱۹- در شکل ۱۲-۳۵، تیر یکنواختی به وزن $۵۰۰\,\mathrm{N}$ و طول $۳/۰\,\mathrm{m}$ به طور افقی نگهداشته شده است. سمت چپ آن به دیوار لولا شده و سمت راست آن به وسیلهٔ کابلی که به فاصلهٔ D بالای کابل به دیوار پیچ شده نگهداشته شده است. کمترین کششی که منجر به پاره شدن کابل می‌شود برابر $۱۲۰۰\,\mathrm{N}$ است. (الف) چه مقدار D مربوط به این کشش است؟ (ب) برای جلوگیری از پاره‌شدن کابل، آیا D باید از این مقدار افزایش یابد یا کاهش؟



شکل ۱۲-۳۵ مسئلهٔ ۱۹

حل: (الف) از شرط تعادل دورانی نیروها حول لولا داریم

$$TL\sin\theta - mg\frac{L}{۲} = ۰ \qquad \sin\theta = \frac{mg}{۲T}$$

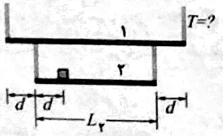
$$\sin\theta = \frac{۵۰۰}{۲(۱۲۰۰)} = ۰/۲۰۸ \Rightarrow \theta = ۱۲^\circ$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\tan\theta = \frac{D}{L} \Rightarrow \tan ۱۲^\circ = \frac{D}{۳} \Rightarrow D = ۰/۶۴\,\mathrm{m}$$

(ب) افزایش D باعث افزایش شیب یعنی افزایش θ می‌شود و در نتیجه T کاهش می‌یابد. پس باید θ را افزایش داد.

●۲۰- در شکل ۱۲-۳۶، چوب بست افقی ۲، با جرم یکنواخت $m_۲ = ۳۰/۰\,\mathrm{kg}$ و طول $L_۲ = ۲/۰۰\,\mathrm{m}$، از چوب بست افقی ۱، با جرم یکنواخت $m_۱ = ۵۰/۰\,\mathrm{kg}$، آویزان است. یک جعبه میخ به جرم $۲۰/۰\,\mathrm{kg}$ روی چوب بست ۲ و به فاصلهٔ $d = ۰/۵۰۰\,\mathrm{m}$ از انتهای سمت چپ قرار دارد. کشش T در کابل نشان داده شده چقدر است؟



شکل ۱۲-۳۶ مسئلهٔ ۲۰

حل: ابتدا چون بست پایینی را در نظر می‌گیریم. T_R را کشش طناب سمت راست چوب بست و T_L را برای کشش طناب، طناب در سمت چپ چوب بست پایینی در نظر می‌گیریم. از شرط تعادلی دورانی حول محور انتهای سمت چپ چوب بست پایینی داریم

$$T_RL_۲ - m_۲g\frac{L_۲}{۲} - mgd = ۰$$

که در آن $m = ۲۰\,\mathrm{kg}$ جرم جعبهٔ میخ است. با جایگزینی مقادیر داده شده خواهیم داشت

$$T_R = ۱۹۶\,\mathrm{N}$$

حال از شرط تعادل انتقالی نیروها برای چوب بست پایینی داریم

$T_R + T_L - (m + m_۲)g = ۰$

$T_L = (m + m_۲)g - T_R = (۲۰ + ۳۰)(۹/۸) - ۱۹۶ = ۲۹۴\,N$

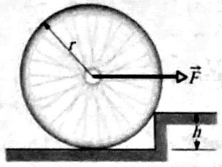
$L_۱ = L_۲ + ۲d$ حال چوب بست بالایی را در نظر می‌گیریم. طول این چوب بست است.

از شرط تعادل دورانی برای این چوب بست حول محور انتخاب سمت چپ آن داریم

$$TL_۱ - m_۱ g\frac{L_۱}{۲} - T_L d - T_R(L_۱ - d) = ۰$$

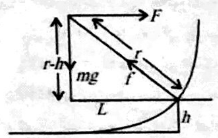
که با جایگزینی مقادیر معلوم خواهیم داشت $T = ۴۵۷\,N$.

۲۱••- در شکل ۱۲-۳۷، بزرگی نیروی $\vec{F}$ که در راستای افقی به محور چرخ وارد می‌شود چقدر باید باشد تا چرخ را از مانعی به ارتفاع $h = ۳/۰۰cm$ بالا ببرد؟ شعاع چرخ برابر $r = ۶/۰۰cm$ و جرم آن برابر $m = ۰/۸۰۰kg$ است. SSM WWW



شکل ۱۲-۳۷ مسئلهٔ ۲۱

حل:



وقتی چرخ در آستانهٔ بلند شدن از کف باشد نیروی عمودی سطح صفر خواهد بود و تنها نیروهای mg و F و f نیروی لبه پله است. برایند گشتاور نیرو را برای این وضعیت برابر صفر قرار می‌دهیم

$$F(r-h) - mgL = ۰$$

که در آن $L = \sqrt{r^۲ - (r-h)^۲} = \sqrt{۲rh - h^۲}$ است لذا

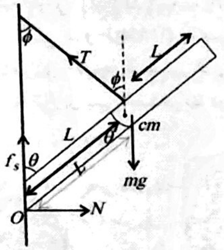
$$F = \frac{mg\sqrt{۲rh - h^۲}}{r-h} = \frac{(۰/۸)(۹/۸)\sqrt{۲(۰/۰۶)(۰/۰۳) - (۰/۰۳)^۲}}{(۰/۰۶) - (۰/۰۳)} = ۱۳/۶\,N$$

لذا همه نیرویی بزرگتر از $F = ۱۳/۶\,N$ باعث عبور چرخ از روی مانع خواهد شد.

۲۲••- در شکل ۱۲-۳۸، صخره‌نوردی به وزن $۵۳۳/۸\,N$ توسط طنابی متصل به دستگاه مهار وی نگهداشته شده است؛ خط اثر نیروی طناب از مرکز جرم آن می‌گذرد. زاویه‌های نشان داده شده $\theta = ۴۰/۰^\circ$ ، $\phi = ۳۰/۰^\circ$ هستند. پاهای او در آستانهٔ لغزیدن روی دیوار قائم است، ضریب اصطکاک استاتیک بین کفشهای صخره‌نورد و دیوار چقدر است؟

شکل ۱۲-۳۸ مسئلهٔ ۲۲

حل: در حالت تعادل، برآیند تمام گشتاور نیروهای خارجی و نیروهای خارجی صفر است.



اگر رابطهٔ گشتاور نیروها را برای صخره‌نورد، نسبت به نقطهٔ O در نظر بگیریم. نیروی عمودی سطح و اصطکاک، گشتاور تولید نمی‌کند. برایند گشتاورها را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$\tau_۱ = |\vec{r}_۱ \times \overrightarrow{mg}| = Lmg\sin\theta$

$\tau_۲ = |\vec{r}_۲ \times \vec{T}| = LT\sin(\theta + \varphi)$

$$\tau_۱ = \tau_۲ \Rightarrow Lmg\cos\theta = LT\sin(\theta+\varphi) \Rightarrow T = mg\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)}$$

$$T = ۵۳۳/۸\frac{۰/۶۴۲۸}{۰/۹۳۹۷} = ۳۶۵/۱۴\,N$$

اکنون، شرط تعادل انتقالی را در نظر می‌گیریم.

در راستای x داریم.

$T\sin\varphi = N$

در راستای y داریم

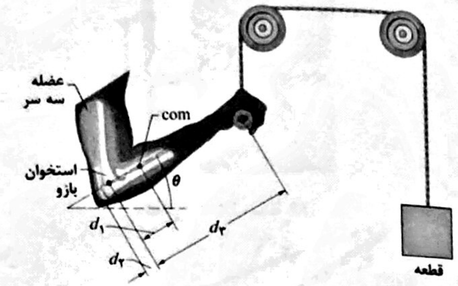
$T\cos\varphi + f_s = mg \Rightarrow f_s = mg - T\cos\varphi$

$f_s = \mu_s N \Rightarrow \mu_s T\sin\varphi = mg - T\cos\varphi$

$$\mu_s = \frac{mg - T\cos\varphi}{T\sin\varphi} = \frac{۵۳۳/۸ - ۳۶۵/۱۴ \times ۰/۸۶۶}{۳۶۵/۱۴ \times ۰/۵} = ۱/۲$$

۲۳••- در شکل ۱۲-۳۹، قطعه‌ای به جرم ۱۵ kg از دستگاه قرقره‌ها بالا کشیده می‌شود. بازوی شخص به حالت قائم است اما ساعد با افق زاویهٔ $\theta = ۳۰^\circ$ می‌سازد. ساعد و دست رویهم دارای جرم ۲/۰kg است و مرکز جرم به فاصلهٔ $d_۱ = ۱۵\,cm$ از نقطهٔ تماس استخوان ساعد و استخوان بالای بازو (استخوان بازو) قرار دارد. عضلهٔ سه سر، ساعد را در فاصلهٔ $d_۲ = ۲/۵cm$

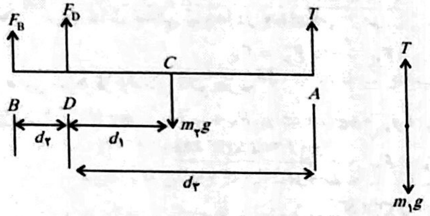
پشت نقطه تماس به طور عمود به سمت بالا می‌کشد. فاصلهٔ



شکل ۱۲-۳۹ مسئلهٔ ۲۳

$d_۳$ برابر ۳۵ cm است. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین) نیروی وارد بر ساعد از طرف عضله سه سر و (پ) بزرگی و (ت) جهت (بالا یا پایین) نیروی وارد بر ساعد از طرف استخوان بازو.

حل: برای سادگی کار ساعد را در وضعیت افقی در نظر گرفته و نیروها را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار نیروها که رسم کردیم داریم

$BD = d_۲ = ۲/۵cm$ و $DC = d_۱ = ۱۵\,cm$

$AD = d_۳ = ۳۵\,cm$

و F_B نیروی حاصل از ماهیچه سه سر بازو، F_D نیروی حاصل از استخوان بازو و $T = m_۱ g = (۱۵)(۹/۸) = ۱۴۷\,N$ است. نقطهٔ D محل اتصال ساعد و بازو است.

(الف) حال شرط تعادل دورانی گشتاور نیروها را حول نقطهٔ D در نظر می‌گیریم.

$F_B d_۲ - Td_۳ + m_۲ g d_۱ = ۰$

$F_B(۲/۵) - (۱۴۷)(۳۵) + (۲)(۹/۸)(۱۵) = ۰$

$F_B = ۱۹۴۰\,N$

(ب) علامت مثبت به معنی این است که جهت F_B به طرف بالاست.

(پ) از شرط تعادل انتقالی نیروها داریم

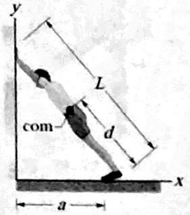
$F_B + F_D + T - mg = ۰$

$۱۹۴۰ + F_D + ۱۴۷ - (۲)(۹/۸) = ۰$

$F_D = -۲۰۶۸\,N$

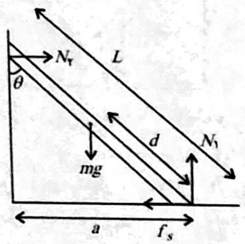
(ت) چون F_D منفی به دست آمده است لذا جهت آن به طرف پایین است.

۲۴••- در شکل ۱۲-۴۰ ، یخ‌نوردی به دیوار یخی که اصطکاک آن ناچیز است، تکیه داده است. فاصلهٔ a برابر با $۰/۹۱۴m$ و فاصلهٔ L برابر $۲/۱۰m$ است. مرکز جرم او $d = ۰/۹۴۰\,m$ از نقطهٔ تماس با زمین فاصله دارد. اگر او در آستانهٔ لغزیدن باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین پاهای او و زمین چقدر است؟



شکل ۱۲-۴۰ مسئلهٔ ۲۴

حل: زمانی که شخص در آستانهٔ لغزیدن قرار دارد. برآیند گشتاور نیروهای خارجی و نیروهای خارجی وارد بر آن صفر است.



برای نیروهای عمودی داریم:

$mg - N_۱ = ۰ \Rightarrow N_۱ = mg$

برای نیروهای افقی داریم:

$N_۲ - f_s = ۰ \Rightarrow N_۲ = f_s \qquad f_s = \mu_s N_۱$

$\Rightarrow N_۲ = \mu_s N_۱ \Rightarrow N_۲ = \mu_s mg$

گشتاور نیروها را نسبت به پای یخ‌نورد که روی زمین است، برابر صفر قرار می‌دهیم:

$mgd\sin\theta - N_۲(L-d)\cos\theta = ۰$

$mgd\sin\theta - \mu_s mg(L-d)\cos\theta = ۰$

$$dtg\theta - \mu_s(L-d) = ۰ \Rightarrow \mu_s = \frac{d}{L-d}tg\theta$$

$$tg\theta = \frac{a}{\sqrt{L^۲ - a^۲}} = \frac{۰/۹۱۴}{\sqrt{(۲/۱)^۲ - (۰/۹۴)^۲}} = ۰/۴۹$$

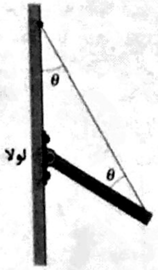
با جایگذاری بدست می‌آوریم:

$$\mu_s = \frac{۰/۹۴}{۲/۱ - ۰/۹۴}۰/۴۹ = ۰/۴$$

دقت داریم، دیوار یخی اصطکاک ایجاد نمی‌کند.

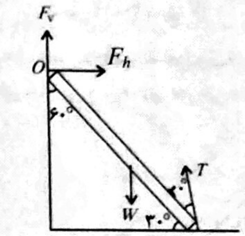
۲۵••- در شکل ۱۲-۴۱، یک سر تیر یکنواختی به وزن ۲۲۲N به دیوار لولا شده است. سردیگر تیر به وسیلهٔ سیمی که با دیوار و همچنین تیر زاویهٔ $\theta = ۳۰^\circ$ می‌سازد نگهداشته شده است.

مطلوب است تعیین (الف) نیروی کشش در سیم و مؤلفه‌های (ب) افقی و (پ) قائم نیروی وارد از لولا بر تیر.



شکل ۱۲-۴۱ مسئلهٔ ۲۵

حل:



(الف) شرط تعادل دورانی نیروها را حول O در نظر می‌گیریم

$$TL\sin ۳۰° - W(L/۲)\sin ۶۰° = ۰$$
$$T(۲)(\sin ۳۰°) - (۲۲۲)(۱)(\sin ۶۰°) = ۰ \Rightarrow T = ۱۹۲/۳\,N$$

(ب) شرط تعادل انتقالی نیروها را در امتداد محور xها می‌نویسیم

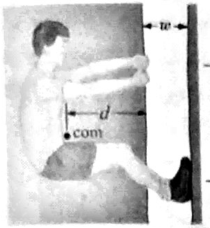
$$F_h - T\sin ۳۰° = ۰$$
$$F_h = T\sin\theta = (۱۹۲/۳)(\sin ۳۰°) = ۹۶/۱\,N$$

(پ) در راستای محور y داریم:

$$F_v - W + T\cos(۳۰) = ۰ \Rightarrow F_v = W - T\cos(۳۰)$$

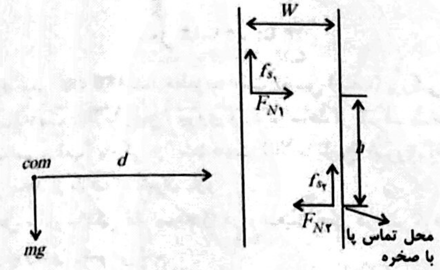
با جایگذاری به دست می‌آوریم: $T = ۵۵/۵N$

۲۶●●- در شکل ۱۲-۴۲، صخره نوردی به جرم ۵۵kg در حال صعود از پشت در امتداد یک شکاف است. او با دستهایش لبهٔ شکاف را می‌کشد و پاهایش را به دیوارهٔ مقابل می‌فشارد. پهنای شکاف $w=۰/۲۰m$ و مرکز جرم صخره نورد در فاصلهٔ افقی $d=۰/۴۰m$ از لبهٔ شکاف قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان دستهای او و صخره $\mu_1=۰/۴۰$ و بین پاهای او و صخره $\mu_2=۱/۲۰$ است. (الف) حداقل کشیدن افقی توسط دستها و فشار وارده توسط پاهای صخره‌نورد برای اینکه او را پایدار نگهدارند، چقدر است؟ (ب) برای کشیدن افقی قسمت (الف)، فاصلهٔ قائم h، میان دستها و پاهای او باید چقدر باشد؟ اگر صخره نورد با سنگی مرطوب مواجه شود، به طوری که μ_1 و μ_2 کاهش یابند، چه تغییری در (پ) پاسخ (الف) و (ت) در پاسخ (ب) ایجاد خواهد شد؟



شکل ۱۲-۴۲ مسئلهٔ ۲۶

حل:



(الف) از شرط تعادل انتقالی نیروها در امتداد افق داریم

$$F_{N_1} - F_{N_2} = ۰ \Rightarrow F_{N_1} = F_{N_2}$$

و از همین شرط در راستای قائم داریم

$$f_{s_1} + f_{s_2} - mg = ۰ \Rightarrow \mu_1 F_{N_1} + \mu_2 F_{N_2} - mg = ۰$$
$$F_{N_1} = F_{N_2} = \frac{mg}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{(۵۵)(۹/۸)}{۰/۴ + ۱/۲} = ۳۳۷\,N$$

(ب) از شرط تعادل دورانی نیروها حول محل تماس پا با صخره، داریم

$$mg(d+w) - f_{s_1}w - F_{N_1}h = ۰$$

که در آن $f_{s_1} = \mu_1 F_{N_1}$ است لذا می‌توان نوشت

$$(۵۵)(۹/۸)[۰/۴ + ۰/۲] - (۰/۴)(۳۳۷)(۰/۲) - (۳۳۷)h = ۰$$
$$\Rightarrow h = ۰/۸۸m$$

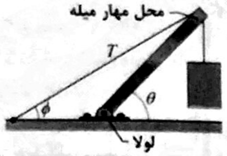
(پ) در پاسخ قسمت (الف) وقتی μ_1 و μ_2 کاهش یابند، F_{N_1} افزایش می‌یابد.

(ت) پاسخ قسمت (ب) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$h = (d+w)\mu_2 + d\mu_1$$

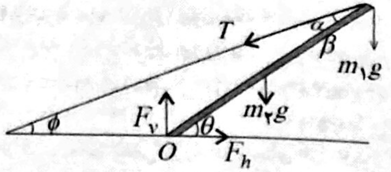
در نتیجه وقتی μ_1 و μ_2 کاهش یابند، h نیز کاهش می‌یابد.

۲۷●●- دستگاه نشان داده شده در شکل ۱۲-۴۳ در حال تعادل است. یک قطعهٔ بتونی به جرم ۲۲۵kg از انتهای میلهٔ یکنواختی به جرم ۴۵/۰kg آویخته شده است. برای زاویه‌های $\phi=۳۰/۰°$ و $\theta=۴۵/۰°$، مطلوب است تعیین (الف) نیروی کشش T در کابل و مؤلفه‌های (ب) افقی و (پ) قائم نیرویی که از طرف لولا به محل مهار میله وارد می‌شود. ILW



شکل ۱۲-۴۳ مسئلهٔ ۲۷

حل:



از مثلث حاصل در شکل دیده می‌شود که $\alpha=۱۵°$ و $\beta=۴۵°$ است.

(الف) از شرط تعادل دورانی حول نقطه لولا O داریم

$$TL\sin\alpha - m_2 g(L/۲)\sin\beta - m_1 gL\sin\beta = ۰$$
$$T = \frac{(m_1 + m_2/۲)g\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{(۲۲۵+۲۲/۵)(۹/۸)(\sin ۴۵°)}{\sin ۱۵°} = ۶۶۲۷N$$

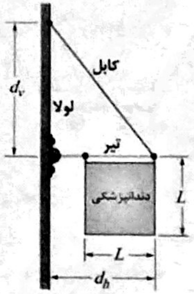
(ب) از شرط تعادل انتقالی در امتداد افق داریم

$$F_h - T\cos ۳۰ = ۰$$
$$F_h = T\cos ۳۰ = (۶۶۲۷)(\cos ۳۰°) = ۵۷۳۹\,N$$

(پ) از شرط تعادل انتقالی در راستای قائم داریم

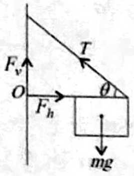
$$F_v - m_1 g - m_2 g - T\sin ۳۰° \Rightarrow F_v = m_1 g + m_2 g + T\sin ۳۰°$$
$$F_v = (۲۲۵)(۹/۸) + (۴۵)(۹/۸) + (۶۶۲۷)(\sin ۳۰°) = ۵۹۰۹\,N$$

۲۸●●- در شکل ۱۲-۴۴، تابلو مربع شکل یکنواختی به جرم ۵۰/۰kg و به ضلع $L=۲/۰۰m$ از یک میلهٔ افقی به طول $d_h=۳/۰۰m$ و جرم ناچیز آویخته شده است. کابلی انتهای میله را به نقطه‌ای از دیوار وصل می‌کند که به فاصلهٔ $d_v=۴/۰۰m$ بالاتر از لولای اتصال میله و دیوار قرار دارد. (الف) نیروی کشش در کابل چقدر است؟ مطلوب است تعیین (ب) بزرگی و (پ) جهت (چپ یا راست) مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به میله از طرف دیوار و (ت) بزرگی و (ث) جهت (بالا یا پایین) مؤلفهٔ قائم این نیرو.



شکل ۱۲-۴۴ مسئلهٔ ۲۸

حل:



(الف) ابتدا زاویهٔ θ را به دست می‌آوریم

$$\sin\theta = \frac{d_v}{\sqrt{d_v^2 + d_h^2}} = \frac{۴}{\sqrt{۱۶+۹}} = ۰/۸ \Rightarrow \theta = ۵۳/۱°$$

از شرط تعادل دورانی حول نقطهٔ O داریم

$$mg(d_h - L/۲) - Td_h\sin\theta = ۰$$
$$(۵۰)(۹/۸)[۳-۱] - T(۳)(۰/۸) = ۰ \Rightarrow T = ۴۰۸\,N$$

(ب) از شرط تعادل انتقالی نیروها در راستای افق داریم

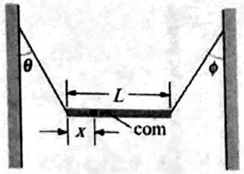
$$F_h - T\cos\theta = ۰$$
$$F_h = T\cos\theta = (۴۰۸)(\cos ۵۳/۱°) = ۲۴۵\,N$$

(پ) چون F_h مثبت است لذا جهت آن صحیح انتخاب شده و به سمت راست است.

(ت) از شرط تعادل انتقالی نیروها در راستای قائم داریم

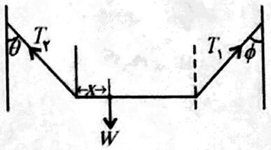
$$F_v + T\sin\theta - mg = ۰ \qquad F_v = mg - T\sin\theta$$
$$F_v = (۵۰)(۹/۸) - (۴۰۸)(۰/۸) = ۱۶۳/۴\,N$$

۲۹●●- میلهٔ نایکنواختی، همان‌طور که در شکل ۱۲-۴۵ نشان داده شده است، به وسیلهٔ دو ریسمان با جرم ناچیز آویخته شده است و به حالت افقی در حال سکون قرار دارد. زاویهٔ یکی از ریسمانها با امتداد قائم $\theta=۳۶/۹°$ و زاویهٔ ریسمان دیگر با امتداد قائم $\phi=۵۳/۱°$ است. اگر طول میلهٔ L برابر ۶/۱۰m باشد، فاصلهٔ x مرکز جرم را از انتهای سمت چپ میله حساب کنید.



شکل ۱۲-۴۵ مسئلهٔ ۲۹

حل:



از شرط تعادل انتقالی در راستای افقی داریم

$$T_۱ \sin\phi - T_۲ \sin\theta = ۰$$

$$T_۱ \sin ۵۳/۱° - T_۲ \sin ۳۶/۹° = ۰ \Rightarrow T_۲ = \frac{۴}{۳}T_۱$$

از شرط تعادل انتقالی در راستای قائم داریم

$$T_۱ \cos ۵۳/۱° + T_۲ \cos ۳۶/۹° - W = ۰$$

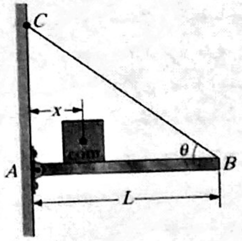
$$T_۱(۰/۶) + \left(\frac{۴}{۳}T_۱\right)(۰/۸) - W = ۰ \Rightarrow T_۱ = \frac{W}{۱/۶۷}$$

از شرط تعادل دورانی حول انتهای سمت چپ میله داریم

$$Wx - T_۱ L\cos\varphi = ۰ \Rightarrow Wx - \left(\frac{W}{۱/۶۷}\right)(۶/۱)(\cos ۵۳/۱°) = ۰$$

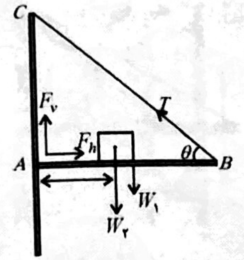
$$x = ۲/۲\,\text{m}$$

●●۳۰- در شکل ۱۲-۴۶، فرض کنید طول L میلهٔ یکنواخت $۳/۰۰\,\text{m}$ و وزن آن $۲۰۰\,\text{N}$ است. همچنین فرض کنید وزن قطعه $W = ۳۰۰\,\text{N}$ و زاویهٔ $\theta = ۳۰/۰°$ است. بیشینهٔ کششی که سیم می‌تواند تحمل کند $۵۰۰\,\text{N}$ است. (الف) بیشترین فاصلهٔ x قبل از پاره شدن سیم چقدر است؟ در حالتی که قطعه در این بیشترین فاصلهٔ x قرار دارد، مؤلفه‌های (ب) افقی و (پ) قائم نیرویی که به وسیلهٔ لولا در A به میله وارد می‌شود چقدر است؟



شکل ۱۲-۴۶ مسائل ۳۰ و ۳۲

حل:



(الف) از شرط تعادل دورانی حول نقطهٔ A داریم

$$T_{max} L\sin\theta - W_۲ x_{max} - W_۱(L/۲) = ۰$$

$$(۵۰۰)(۳)(\sin ۳۰°) - (۳۰۰)x_{max} - (۲۰۰)(۱/۵) = ۰$$

$$\Rightarrow x_{max} = ۱/۵\,\text{m}$$

(ب) از شرط تعادل انتقالی نیروها در راستای افق داریم

$$F_h - T_{max}\cos\theta = ۰$$

$$F_h = (۵۰۰)(\cos ۳۰°) = ۴۳۳\,\text{N}$$

(پ) از شرط تعادل انتقالی نیروها در راستای قائم داریم

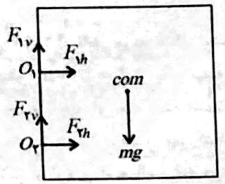
$$F_v + T_{max}\sin\theta - W_۲ - W_۱ = ۰$$

$$F_v = W_۲ + W_۱ - T_{max}\sin\theta$$

$$F_v = ۳۰۰ + ۲۰۰ - (۵۰۰)(\sin ۳۰°) = ۲۵۰\,\text{N}$$

●●۳۱- ارتفاع دری $۲/۱\,\text{m}$ در امتداد محور y و به سمت بالا و پهنای $۰/۹۱\,\text{m}$ در امتداد محور x از لولا به سمت خارج است. فاصلهٔ یک لولا تا بالای در $۰/۳۰\,\text{m}$ و فاصلهٔ لولای دیگر تا پایین در نیز $۰/۳۰\,\text{m}$ است، و در $۲۷\,\text{kg}$ جرم دارد. برحسب نماد بردار یکه مطلوب است تعیین نیروی وارد بر در، در (الف) لولای بالایی و (ب) لولای پایینی.

حل: نیروها را رسم می‌کنیم



با توجه به صورت مسئله $F_{۱v} = F_{۲v} = \frac{mg}{۲}$، لذا داریم

$$F_{۱v} = F_{۲v} = \frac{(۲۷)(۹/۸)}{۲} = ۱۳۲/۲\,\text{N}$$

حال از شرط تعادل دورانی حول $O_۱$، لولای بالایی، استفاده می‌کنیم.

$$F_{۲h}(O_۱O_۲) - mg\left(\frac{a}{۲}\right) = ۰$$

که در آن $OO' = ۲/۱ - (۲)(۰/۳) = ۱/۵\,\text{m}$ و $a = ۲/۱\,\text{m}$ ارتفاع در است. در نتیجه داریم $F_{۲h} = ۸۰/۳\,\text{N}$. از شرط تعادل انتقالی نیروها در راستای افق داریم

$$F_{۱h} + F_{۲h} = ۰ \qquad F_{۱h} = -F_{۲h} = -۸۰/۳\,\text{N}$$

(الف) حال می‌توانیم نیروی وارد بر لولای بالایی را برحسب نمادگذاری بردارهای یکه به صورت زیر نوشت

$$\vec{F}_{بالایی} = (-۸۰/۳\hat{i} + ۱۳۲/۲\hat{j})\,\text{N}$$

(ب) و برای لولای پایینی داریم

$$\vec{F}_{پایینی} = (۸۰/۳\hat{i} + ۱۳۲/۲\hat{j})\,\text{N}$$

●●۳۲- در شکل ۱۲-۴۶ میلهٔ باریک و افقی AB با وزن ناچیز و طول L، در نقطهٔ A به دیواری قائم لولا شده و در نقطهٔ B به‌وسیلهٔ سیم نازک BC، که با افق زاویهٔ θ می‌سازد، نگهداشته شده است. قطعه‌ای به وزن W می‌تواند در امتداد میله حرکت کند؛ مکان آن به وسیلهٔ فاصلهٔ مرکز جرم آن تا دیوار یعنی x مشخص می‌شود. برحسب تابعی از x، مطلوب است تعیین (الف) نیروی کشش در سیم و مؤلفه‌های (ب) افقی و (پ) قائم نیرویی که به وسیلهٔ لولا در A به میله وارد می‌شود.

حل: نمودار نیروها مشابه مسئله ۳۰ است که در اینجا چون جرم میله ناچیز فرض شده لذا $W_۱ = ۰$ است.

(الف) از شرط تعادل دورانی حول لولا داریم

$$TL\sin\theta - Wx = ۰ \Rightarrow T = \frac{Wx}{L\sin\theta}$$

(ب) از شرط تعادل انتقالی در راستای افق داریم

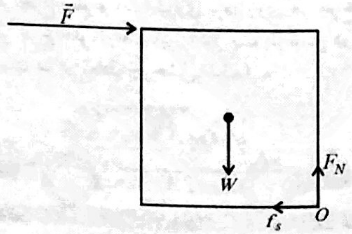
$$F_h = T\cos\theta = \left(\frac{Wx}{L\sin\theta}\right)\cos\theta = \frac{Wx}{L}\cot\theta$$

(پ) از شرط تعادل انتقالی در راستای قائم داریم

$$F_v = W - T\sin\theta = W - \left(\frac{Wx}{L\sin\theta}\right)\sin\theta = W\left(۱ - \frac{x}{L}\right)$$

●●۳۳- یک جعبهٔ مکعب شکل با شن پر شده است و $۸۹۰\,\text{N}$ وزن دارد. می‌خواهیم با وارد کردن یک نیروی افقی به یکی از کناره‌های بالایی جعبه، آن را «بغلتانیم». (الف) کمینهٔ نیروی لازم چقدر است؟ (ب) کمینهٔ ضریب اصطکاک ایستایی لازم بین جعبه و کف اتاق چقدر است؟ (پ) آیا راه مؤثرتری برای غلتاندن جعبه وجود دارد؟ اگر وجود دارد، کمترین نیروی ممکن که باید برای غلتاندن جعبه مستقیماً به آن وارد کرد چقدر است؟ (راهنمایی: در یکی از حالتهایی که مکعب شروع به بلند شدن روی یک یال می‌کند، نیروی عمود در کجا واقع است؟) SSM WWW

حل:



(الف) در آستانه غلتش حول گوشه O گشتاور نیروی F با گشتاور نیروی وزن برابر است.

$$W\left(\frac{a}{۲}\right) - Fa = ۰ \Rightarrow F = \frac{W}{۲} = ۴۴۵\,\text{N}$$

(ب) از شرط تعادل انتقالی در راستای افق و قائم به ترتیب داریم

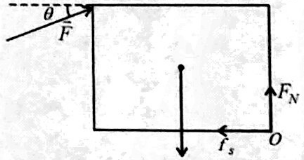
$$F - f_s = ۰ \qquad f_s = F = ۴۴۵\,\text{N}$$

$$F_N - W = ۰ \qquad F_N = W = ۸۹۰\,\text{N}$$

در نتیجه می‌توان کمینهٔ ضریب اصطکاک را به دست آورد

$$f_s = \mu_s F_N \Rightarrow ۴۴۵ = \mu_s(۸۹۰) \Rightarrow \mu_s = ۰/۵$$

(پ) جعبه را می‌توان با اعمال نیروی کمتری به غلتش درآورد که در شکل زیر نشان داده شده است.



از شرط تعادل دورانی حول گوشهٔ O داریم

$$FL\cos\theta + FL\sin\theta - W(L/۲) = ۰$$

$$\Rightarrow F = \frac{W}{۲(\cos\theta + \sin\theta)}$$

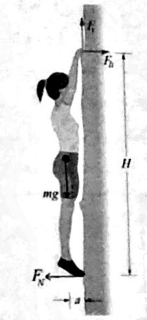
شرط آن که F کمینه باشد این است که مخرج بیشینه باشد که این به ازای $\theta = ۴۵°$ حاصل می‌گردد. در نتیجه داریم

$$F_{min} = \frac{۸۹۰}{۲(\cos ۴۵° + \sin ۴۵°)} = ۳۱۴/۷\,\text{N}$$

●●۳۴- شکل ۱۲-۴۷ صخره‌نوردی به جرم $۷۰\,\text{kg}$ را نشان می‌دهد که توسط فقط مانعی با یک دست از لبهٔ یک برآمدگی افقی توخالی در یک دیوار صخره‌ای آویزان شده است (انگشتان او به سمت پایین فشار وارد می‌کنند.) پاهای او با دیوار صخره در فاصلهٔ $H = ۲/۰\,\text{m}$ درست زیر انگشتان او قرار دارد ولی تکیه‌گاهی ندارد. مرکز جرم او در فاصلهٔ $a = ۰/۲۰\,\text{m}$ از دیوار قرار دارد. فرض کنید نیروی حاصل از لبهٔ تکیه‌گاه انگشتان او به طور مساوی روی چهار انگشت تقسیم می‌شود. (الف) مؤلفهٔ افقی F_h و (ب) مؤلفهٔ قائم F_v نیروی وارد بر هر انگشت چقدر است؟

شکل ۱۲-۴۷ مسئلهٔ ۳۴

حل: حل: **(الف)** نیروی عمودی وارد بر پا را F_N در نظر می‌گیریم. برای به دست آوردن F_h از شرط $\sum\tau=0$ استفاده می‌کنیم. رابطه را نسبت به محل تماس پا با دیوار یعنی نقطه o در نظر می‌گیریم.



$$(0)F_N+(0/20)(mg)-(2/0)(4F_h)+(0)(4F_v)=0$$

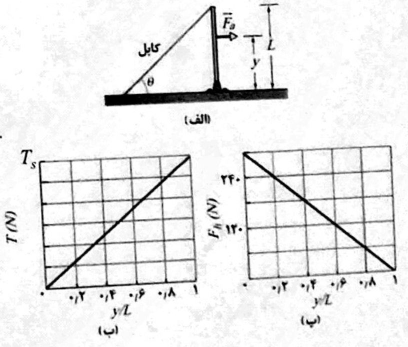
$$F_h=\frac{(0/20)(70)(9/8)}{4(2/0)}=17/15\text{N}$$

(ب) برای به دست آوردن F_v از شرط $\sum F_y=0$ استفاده می‌کنیم.

$$4F_v-mg=0$$

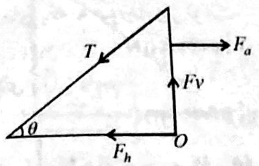
$$F_v=\frac{mg}{4}=\frac{(70)(9/8)}{4}=171/5\text{N}$$

۳۵●●- شکل ۱۲-۴۸ الف یک تیر یکنواخت قائم به طول L را نشان می‌دهد که در انتهای پایین آن لولا شده است. نیروی افقی $\vec{F}_a$ در فاصلهٔ y از انتهای پایینی تیر بر آن وارد می‌شود. تیر به خاطر کابلی که به انتهای بالایی آن بسته شده و با افق زاویهٔ θ می‌سازد به صورت قائم باقی می‌ماند. شکل ۱۲-۴۸ ب نیروی کشش T در کابل را برحسب تابعی از مکان نیروی وارد شده به صورت کسر y/L از طول تیر نشان می‌دهد. مقیاس محور T برحسب $T_s=600\text{N}$ داده شده است. شکل ۱۲-۴۸ پ بزرگی F_h نیروی افقی وارد از لولا به تیر را نیز به صورت تابعی از y/L نشان می‌دهد. مطلوب است محاسبهٔ (الف) زاویهٔ θ و (ب) بزرگی نیروی $\vec{F}_a$.



شکل ۱۲-۴۸ مسئله ۳۵

حل: (الف) از شرط تعادل دورانی حول لولا داریم



$$TL\cos\theta-F_ay=0\Rightarrow T=\left(\frac{Fa}{\cos\theta}\right)\left(\frac{y}{L}\right)$$

اما دیده می‌شود که می‌توان $F_a/\cos\theta$ را شیب منحنی در شکل ب در نظر گرفت که با توجه به شکل، شیب برابر است با ۶۰۰ یعنی

$$\frac{Fa}{\cos\theta}=600$$

از شرط تعادل انتقالی نیروها در راستای افق داریم

$$F_a+F_h-T\cos\theta=0 \qquad F_h=T\cos\theta-F_a$$

$$F_h=\left(\frac{Fa}{\cos\theta}\right)\left(\frac{y}{L}\right)\cos\theta-F_a=F_a\left(\frac{y}{L}\right)-F_a$$

از مقایسه این رابطه با منحنی شکل ب در می‌یابیم که F_h باید وارون باشد یعنی

$$F_h=F_a+(-F_a)\left(\frac{y}{L}\right)$$

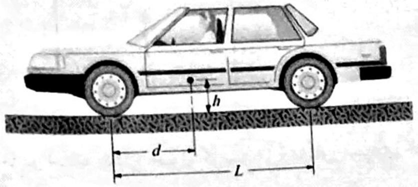
که از مقایسه با شکل می‌بینیم که شیب منحنی برابر ۳۰۰- است. پس $F_a=300$ است و در نتیجه داریم

$$\frac{F_a}{\cos\theta}=600$$

$$\cos\theta=\frac{300}{600}=0/5\Rightarrow\theta=60^\circ$$

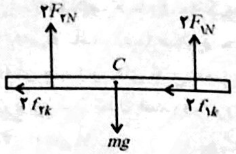
(ب) نشان دادیم که $F_a=300\text{N}$ است.

۳۶●●- در شکل ۱۲-۴۹، رانندهٔ اتومبیلی روی جادهٔ افقی مجبور به توقف اضطراری می‌شود و ترمز می‌گیرد و هر چهار چرخ قفل می‌شوند و در امتداد جاده سر می‌خورند. ضریب اصطکاک جنبشی بین لاستیک و جاده برابر ۰/۴۰است. فاصلهٔ دو محور جلو و عقب اتومبیل $L=4/2\text{m}$ است و مرکز جرم آن به فاصلهٔ $d=1/8\text{m}$ پشت محور جلویی و به ارتفاع $h=0/75\text{m}$ از سطح جاده قرار دارد. وزن اتومبیل ۱۱ kN است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) شتاب کاهشی ترمز اتومبیل، (ب) نیروی عمود وارد بر هر چرخ عقب، (پ) نیروی عمود وارد بر هر چرخ جلو و (ت) نیروی ترمز روی هر چرخ عقب و روی هر چرخ جلو. (راهنمایی: اگر چه اتومبیل در تعادل انتقالی نیست اما در تعادل چرخشی است.)



شکل ۱۲-۴۹ مسئله ۳۶

حل:



(الف)

$$-\mu_kmg=ma\Rightarrow a=-\mu_kg$$

$$a=-(0/4)(9/8)=-3/92\text{m/s}^2$$

(ب) از شرط تعادل انتقالی در راستای قائم داریم

$$2F_{1N}+2F_{2N}-mg=0 \qquad F_{1N}+F_{2N}=\frac{mg}{2}$$

$$F_{1N}+F_{2N}=\frac{(11\times10^3)}{2}=5500\text{N} \qquad (1)$$

از شرط تعادل دورانی حول مرکز جرم داریم

$$2F_{1N}(1/8)-2F_{2N}(4/2-1/8)-2f_{1k}(0/75)-2f_{2k}(0/75)=0$$

$$1/8F_{1N}-2/4F_{2N}-(0/75)(f_{1k}+f_{2k})=0 \qquad (2)$$

از رابطه (۱) داریم

$$F_{1N}+F_{2N}=5500\Rightarrow\frac{1}{\mu_k}(f_{1k}+f_{2k})=5500$$

$$\Rightarrow f_{1k}+f_{2k}=(0/4)(5500)=2200\text{N}$$

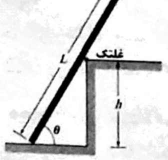
با جایگزینی در رابطه (۲) و از حل معادله (۱) و (۲) برای F_{1N} و F_{2N} داریم $F_{1N}=3535/7\text{N}$ و $F_{2N}=1964/3\text{N}$.

(پ)

$$f_{1k}=\mu_kF_1N=(0/4)(3535/7)=1414/3\text{N}$$

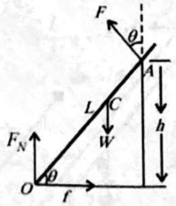
$$f_{2k}=\mu_kF_{2N}=(0/4)(1964/3)=785/7\text{N}$$

۳۷●●- در شکل ۱۲-۵۰، یک الوار یکنواخت به طول L برابر ۶/۱۰m و وزن ۴۴۵N از یک سر روی زمین و از سر دیگر روی غلتک بدون اصطکاکی واقع در بالای دیواری به ارتفاع $h=3/05\text{m}$ به حال سکون قرار دارد. الوار به ازای تمام مقدارهای $\theta\geq70^\circ$ در حال تعادل می‌ماند، و به ازای $\theta<70^\circ$ می‌لغزد. ضریب اصطکاک ایستایی میان الوار و زمین را به دست آورید.



شکل ۱۲-۵۰ مسئله ۳۷

حل:



از شرط دورانی حول پای الوار داریم

$$F(OA)-W(OC)\cos\theta=0$$

اما $OC=L/2$ و $OA=\frac{h}{\sin\theta}=$ لذا می‌توان نوشت

$$F\left(\frac{h}{\sin\theta}\right)-W\left(\frac{L}{2}\right)\cos\theta=0\Rightarrow F=\frac{WL\sin\theta\cos\theta}{2h}$$

$$F=\frac{(445)(6/1)(\sin70^\circ)(\cos70^\circ)}{2(3/05)}=143\text{N}$$

حال از شرط تعادل انتقالی در راستای قائم داریم

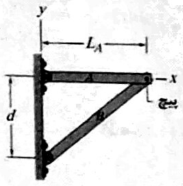
$$F\cos\theta+F_N-W=0$$

$$(143)(\cos70^\circ)+F_N-445=0\Rightarrow F_N=396\text{N}$$

وقتی الوار در آستانهٔ لیز خوردن است داریم $f_{s,\max}=\mu_sF_N$ از طرف دیگر با توجه به شرط تعادل انتقالی در راستای افق داریم $f_{s,\max}=F\sin\theta$ لذا می‌توان نوشت

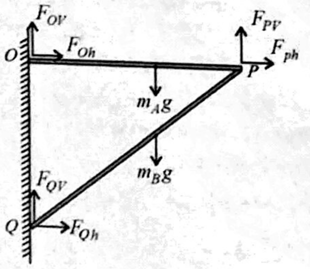
$$\mu_s=\frac{f_{s,\max}}{F_N}=\frac{F\sin\theta}{F_N}=\frac{(143)(\sin70^\circ)}{396}=0/34$$

۳۸●●- در شکل ۱۲-۵۱، دو تیر یکنواخت B و A، از یک سو به دیوار لولا شده‌اند و سر دیگر آنها با پیچ سفت نشده به هم متصل شده است (گشتاوری از یکی بر دیگری وجود ندارد). تیر A دارای طول $L_A=2/40\text{m}$ و جرم ۵۴/۰kg و تیر B دارای جرم ۶۸/۰kg است. فاصلهٔ میان دولولا $d=1/8\text{m}$ است. برحسب نماد بردار یکه مطلوب است نیروی وارد بر (الف) تیر A از طرف لولا، (ب) تیر A از طرف پیچ، (پ) تیر B از طرف لولا و (ت) تیر B از طرف پیچ.

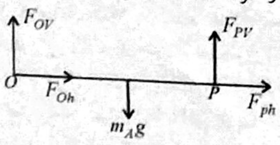


شکل ۱۲-۵۱ مسئله ۳۸

حل:



برای میلهٔ A از شرط تعادل دورانی حول نقطهٔ O داریم



$F_{Pv}(L)-m_A g\left(\frac{L}{۲}\right)=۰ \qquad F_{Pv}=\frac{mg}{۲}$

$F_{Pv}=\frac{(۵۴)(۹/۸)}{۲}=۲۶۴/۶\,\mathrm{N}$

از شرط تعادل انتقالی در راستای قائم داریم

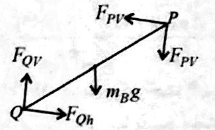
$F_{ov}+F_{Pv}-m_A g=۰ \qquad F_{ov}=m_{Ag}-F_{Pv}$

$F_{ov}=(۵۴)(۹/۸)-۲۶۴/۶=۲۶۴/۶\,\mathrm{N}$

از شرط تعادل انتقالی در راستای افق داریم

$F_{Oh}+F_{Ph}=۰ \qquad F_{Oh}=-F_{Ph}$

بزرگی این نیروها را از بررسی تیر B به دست می‌آوریم.
حال نیروهای وارد بر تیر B را در نظر می‌گیریم



از شرط تعادل دورانی حول نقطهٔ Q داریم

$F_{Ph}(L_B)\cos\theta-F_{Pv}(L_B)\sin\theta-m_B g\left(\frac{L_B}{۲}\right)\sin\theta=۰$

که بایستی ابتدا θ و L_B را محاسبه کنیم. با توجه به شکل داریم

$\tan\theta=\frac{L_A}{d}=\frac{۲/۴}{۱/۸}=۱/۳۳\Rightarrow\theta=۵۳^\circ$

$\sin\theta=\frac{L_A}{L_B}\Rightarrow L_B=\frac{L_A}{\sin\theta}=\frac{۲/۴}{۰/۸}=۳\,\mathrm{m}$

در نتیجه می‌توان F_{ph} را به دست آورد

$F_{ph}(۳)(\cos۵۳^\circ)-(۲۶۴/۶)(۳)(\sin۵۳^\circ)$
$-(۶۸)(۹/۸)\left(\frac{۳}{۲}\right)(\sin۵۳^\circ)=۰$

$F_{Ph}=۷۹۴\,\mathrm{N}$

در نتیجه با توجه به رابطه $F_{Oh}=-F_{Ph}$ خواهیم داشت $F_{Oh}=-۷۹۳/۳\mathrm{N}$.

از شرط تعادل انتقالی در راستای افق داریم

$F_{Oh}-F_{Ph}=۰ \qquad F_{Oh}=F_{Ph}=۷۹۳/۳\,\mathrm{N}$

از شرط تعادل انتقالی در راستای قائم داریم

$F_{Qv}-F_{Pv}-m_B g=۰ \qquad F_{Qv}=m_B g+F_{Pv}$

$F_{Qv}=(۶۸)(۹/۸)+۲۶۴/۶=۹۳۱\mathrm{N}$

(الف) $\vec{F}=-۷۹۳/۳\,\hat{i}+۲۶۴/۶\,\hat{j}$

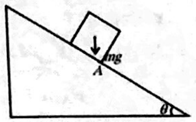
(ب) $\vec{F}=+۷۹۴\,\hat{i}+۲۶۴/۶\,\hat{j}$

(پ) $\vec{F}=۷۹۴\,\hat{i}+۹۳۱\,\hat{j}$

(ت) $-\vec{F}=-۷۹۴\,\hat{i}-۲۶۴/۶\,\hat{j}$

۳۹●●●- صندوق مکعب شکلی به ضلع $۱/۲\,\mathrm{m}$ محتوی ماشین آلات است به طوری که مرکز جرم صندوق و محتویاتش $۰/۳۰\mathrm{m}$ بالاتر از مرکز هندسی صندوق واقع است. این صندوق روی یک سطح شیبدار، که با افق زاویهٔ θ می‌سازد، قرار دارد. وقتی θ به تدریج از صفر افزایش یابد، به زاویه‌ای می‌رسیم که صندوق شروع به لغزیدن می‌کند یا واژگون می‌شود. هرگاه ضریب اصطکاک ایستایی μ_s بین صندوق و سطح شیبدار ۰/۶۰ باشد، (الف)صندوق واژگون می‌شود یا می‌لغزد؟ اگر $\mu_s=۰/۷۰$ باشد، (پ) صندوق واژگون می‌شود یا می‌لغزد؟ (ت) در چه زاویه‌ای این عمل رخ می‌دهد؟ (راهنمایی: در شروع واژگون شدن صندوق نیروی عمودی به کجا وارد می‌شود؟)

حل:



برای شروع لغزش داریم

$mg\sin\theta=f_{s,\max}=\mu_s mg\cos\theta\Rightarrow\mu_s=\tan\theta_s$

اگر زاویهٔ θ بزرگتر θ_s شود جسم شروع به لیز خوردن می‌کند.
اگر امتداد نیروی mg از نقطهٔ A بگذرد جسم در آستانهٔ چرخش قرار می‌گیرید. در این وضعیت داریم

$\tan\theta=\frac{l/۲}{\frac{l}{۲}+h}=\frac{۰/۶}{۰/۶+۰/۳}=۰/۶۷$

$\theta_t=۳۳/۸^\circ$

اگر زاویهٔ θ بزرگتر از θ_t شود جسم شروع به چرخش حول نقطهٔ A می‌کند.

(الف) $\mu_s=\tan\theta_s\Rightarrow ۰/۶=\tan\theta_s\Rightarrow\theta_s=۳۱^\circ$

پس وقتی θ افزایش می‌یابد جسم پس از زاویهٔ ۳۱° ابتدا شروع به لیز خوردن می‌کند چون غلتیدن پس از زاویه $۳۳/۸^\circ$ رخ می‌دهد.

(ب) در زاویه ۳۱° جسم شروع به لیز خوردن می‌کند.

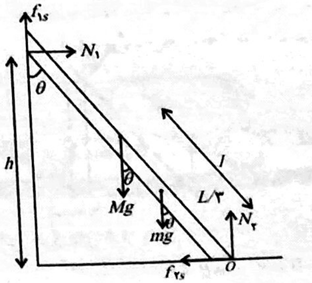
(پ) $\mu_s=\tan\theta_s\Rightarrow ۰/۷=\tan\theta_t\Rightarrow\theta_t=۳۵^\circ$

در این حالت جسم ابتدا شروع به غلتیدن می‌کند.

(ت) در زاویهٔ $\theta=۳۳/۸^\circ$ جسم شروع به دوران می‌کند.

۴۰●●●- در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۲، ضریب اصطکاک ایستایی μ_s بین نردبان و محل اتکا را ۰/۵۳ بگیرید. برای در آستانهٔ لغزش قرار گرفتن تا چه فاصله‌ای (برحسب درصد) آتش‌نشان باید روی نردبان قرار گیرد؟

حل: M جرم آتش‌نشان و m جرم نردبان است.



گشتاور کل نیروها را نسبت به نقطهٔ O می‌یابیم و این برآیند را برابر صفر قرار می‌دهیم از طرفی برایند کل نیروهای وارد شده هم باید برابر با صفر باشد.

برای نیروها داریم: $N_۱=f_{۲s}$

$f_{۱s}+N_۲=(Mg)+mg$

برای اصطکاک داریم $f_{۲s}=\mu_{۲s}N_۲\ ,\ f_{۱s}=\mu_{۱s}N_۱$

$\Rightarrow N_۱=\mu_{۲s}N_۲\Rightarrow N_۲=\frac{۱}{\mu_{۲s}}N_۱$

با جایگذاری بدست می‌آوریم:

$\mu_{۱s}N_۱+\frac{۱}{\mu_{۲s}}N_۱=(M+m)g$

$\left(\mu_{۱s}+\frac{۱}{\mu_{۲s}}\right)N_۱=(M+m)g=N_۱=\frac{M+m}{\mu_{۱s}+\frac{۱}{\mu_{۲s}}}g$

فرض می‌کنیم آتش‌نشان به اندازهٔ l از نردبان بالا رفته است.
اکنون روابط گشتاور را در نظر می‌گیریم.
گشتاور را با τ نشان می‌دهیم.
گشتاور به خارج صفحه است.

$\tau_۱=Mgl\sin\theta+mg\frac{L}{۳}\sin\theta$

گشتاور به داخل صفحه است.

$\tau_۲=N_۱L\sin\theta+f_{۱s}L\sin\theta$

$\Rightarrow\tau_۱=\tau_۲\Rightarrow g\sin\theta\left(Ml+m\frac{L}{۳}\right)=L\sin\theta(N_۱+\mu_{۱s}N_۱)$

$\Rightarrow N_۱(۱+\mu_{۱s})L=g\left(Ml+۳\frac{L}{۳}\right)$

$N_۱(۱+\mu_{۱s})=g\left(M\frac{l}{L}+\frac{m}{۳}\right)$

داریم $\mu_{۱s}=۰/۵۳$. برای بدست آوردن $\mu_{۲s}$ ، از مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۲ بهره می‌گیریم. از صورت مثال داریم:

$F_{Px}=\mu_{۲s}F_{Py}\Rightarrow\mu_{۲s}=\frac{F_{Px}}{F_{Py}}$

$\mu_{۲s}=\frac{۴۱۰}{۱۱۰۰}=۰/۳۷$

با جایگذاری بدست می‌آوریم:

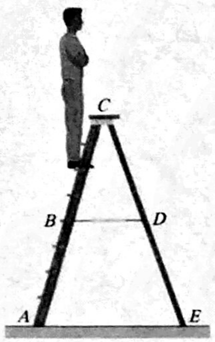
$N_۱=\frac{۷۲+۵۴}{۰/۵۳+\frac{۱}{۰/۳۷}}\times۹/۸=۳۸۲/۳\mathrm{N}$

$\Rightarrow ۳۸۲/۳\,(۱+۰/۵۳)=۹/۸\left(۷۲\frac{l}{L}+\frac{۵۴}{۳}\right)$

$\Rightarrow ۷۲\frac{l}{L}+۱۸=۵۹/۷\Rightarrow\frac{l}{L}=۰/۶$

پس آتش‌نشان می‌توان تا ۰/۶ طول نردبان را بالا برود.

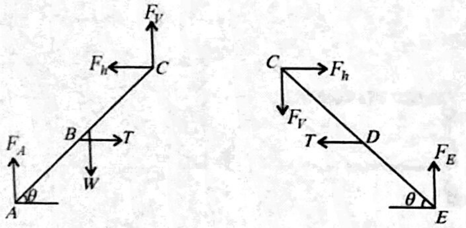
۴۱●●●- برای نردبان دو طرفهٔ نشان داده شده در شکل ۱۲-۵۲، طولهای AC و CE هر یک از $۲/۴۴\mathrm{m}$ است و در نقطهٔ C به هم لولا شده‌اند. میلهٔ نگهدارندهٔ BD به طول $۰/۷۶۲\mathrm{m}$ به وسط نردبان وصل شده است. مردی به وزن $۸۵۴\mathrm{N}$ در طول نردبان



شکل ۱۲-۵۲ مسئلهٔ ۴۱

به اندازهٔ $۱/۸۰\mathrm{m}$ بالا می‌رود. با فرض اینکه کف اتاق بدون اصطکاک و وزن نردبان قابل چشمپوشی است، تعیین کنید (الف) نیروی کشش در میلهٔ نگهدارنده، و نیروهایی را که به وسیلهٔ کف اتاق به نردبان در (ب)A، و (پ) E وارد می‌شوند. (راهنمایی: هنگام به کاربردن شرطهای تعادل، قسمتهای مختلف نردبان را به طور مجزا در نظر بگیرید.)

حل: نمودار نیروهای وارد بر دو طرف نردبان را رسم می‌کنیم.



w نیروی گرانش وارد بر مرد، T نیروی کشش در میلهٔ اتصال، F_h مؤلفهٔ افقی نیروی وارد از یک طرف نردبان به طرف دیگر و F_v مؤلفهٔ عمودی آن است، F_A و F_E نیروهای وارد از طرف کف بر دو پایهٔ نردبان هستند. فاصلهٔ مرد از بالای نردبان $L/۴$ است.

از شرط تعادل انتقالی در امتداد افق (۱) $T-F_h=۰$ و در راستای قائم (۲) $F_v+F_A-w=۰$ است. از شرط تعادل دورانی حول لولا در نقطه داریم

$F_A L\cos\theta-w\left(\frac{L}{۴}\right)\cos\theta-T\left(\frac{L}{۲}\right)\sin\theta=۰ \qquad (۳)$

این روابط برای طرف سمت چپ نردبان بودند و برای طرف سمت راست نردبان نیز روابط مشابهی برقرارند، $F_h-T=۰$ ، (۴) $F_E-F_v=۰$ و (۵) $F_E L\cos\theta-T(L/۲)\sin\theta=۰$. به این ترتیب مشاهده می‌کنیم که برای پنج مجهول F_A، F_E، F_h، F_v و T پنج معادله در اختیار داریم که به کمک آنها می‌توانیم پنج مجهول را به دست آوریم. قبل از حل معادله‌ها زاویه θ را محاسبه می‌کنیم.

$$\cos\theta = \frac{\frac{۱}{۲}AE}{AC} = \frac{BD}{AC} = \frac{۰/۷۶۲}{۲/۴۴} = ۰/۳۱۲$$

$\theta = ۷۱/۸^\circ$

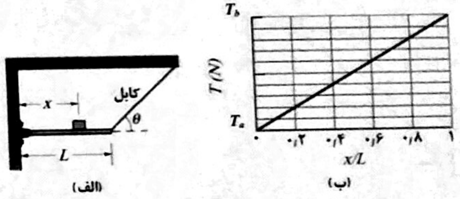
(الف) از معادله (۲)، $F_A = w - F_v$ و از معادله (۴) $F_E = F_v$ و از معادلهٔ (۵) $F_E = T\tan\theta$ را در معادلهٔ (۴) جایگزین کرده و ساده کنیم می‌توان نوشت

$$T = \frac{۳W}{۴\tan\theta} = \frac{۳(۸۵۴)}{۴(۳/۰۴)} = ۲۱۱\text{N}$$

(ب) و **(پ)** از حل معادله‌ها برای F_A و F_E خواهیم داشت

$F_E = ۳۲۰\text{N}$ و $F_A = ۵۳۴\text{N}$

۴۲●●●- شکل ۱۲-۵۳ الف یک تیر یکنواخت افقی به جرم m_b و طول L را نشان می‌دهد که در سمت چپ به دیوار لولا شده و در سمت راست به وسیلهٔ کابلی که با افق زاویهٔ θ می‌سازد، نگهداشته شده است. بسته‌ای به جرم m_p در فاصلهٔ x از انتهای سمت چپ تیر روی آن قرار دارد. جرم کل برابر $m_b + m_p = ۶۱/۲۲\text{kg}$ است. شکل ۱۲-۵۳ ب نیروی کشش T در کابل را برحسب تابعی از مکان بسته به صورت کسر x/L طول تیر، به دست می‌دهد. مقیاس محور T با $T_a = ۵۰۰\text{N}$ و $T_b = ۷۰۰\text{N}$ مشخص شده است. مطلوب است تعیین (الف) زاویهٔ θ، (ب) جرم m_b و (پ) جرم m_p.



شکل ۱۲-۵۳ مسئلهٔ ۴۲

حل: (الف) از شرط تعادل دورانی حول لولا داریم

$$TL\sin\theta - m_p gx - m_b g\frac{L}{۲} = ۰$$

$$T\sin\theta - m_p g\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{۱}{۲}m_b g = ۰$$

با در نظر گرفتن نمودار

$$\left.\begin{array}{l} x = ۰ \\ T = ۵۰۰\text{N}\end{array}\right. \Rightarrow ۵۰۰\sin\theta = \frac{۱}{۲}m_b g \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{L} = ۰/۵ \\ T = ۶۹۰۰\text{N}\end{array}\right. \Rightarrow ۶۹۰۰\sin\theta = \frac{۱}{۲}(m_P + m_b)g$$

$$= \frac{۱}{۲}(۶۱/۲۲)(۹/۸)$$

$$\Rightarrow \sin\theta = ۰/۵ \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

(ب) از رابطه (۱) خواهیم داشت

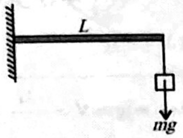
$$(۵۰۰)(۰/۵) = \frac{۱}{۲}m_b(۹/۸) \Rightarrow m_b = ۵۱\text{ kg}$$

(پ) در نتیجه داریم

$$m_P = ۶۱/۲۲ - ۵۱ = ۱۰/۲۲\text{kg}$$

۴۳●- یک میلهٔ آلومینیومی افقی به قطر $۴/۸\text{cm}$ به اندازهٔ $۵/۳\text{cm}$ از دیوار بیرون آمده است. جسمی به جرم ۱۲۰۰kg به انتهای میله آویخته می‌شود. مدول برشی آلومینیوم $۳/۰\times۱۰^{۱۰}\text{ N/m}^۲$ است. از وزن میله چشمپوشی کنید. مطلوب است تعیین (الف) تنش برشی وارد بر میله و (ب) انحراف قائم انتهای میله. **SSM ILW**

حل:



(الف) تنش برشی از رابطه زیر به دست می‌آید که در آن F بزرگی نیروی موازی است که به یک وجه میلهٔ آلومینیومی وارد می‌شود و A مساحت سطح مقطع میله است. در اینجا F وزن جسم است که به انتهای میله وارد می‌شود و که r شعاع میله است، لذا داریم

$$\frac{F}{A} = \frac{mg}{\pi r^۲} = \frac{(۱۲۰۰)(۹/۸)}{۳/۱۴(۰/۰۲۴)^۲} = ۶/۵\times۱۰^۶\text{ N/m}^۲$$

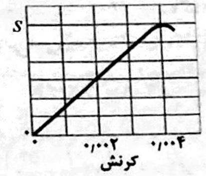
(ب) رابطهٔ بین L طول جابه‌جا شدهٔ میله و Δx انحراف عمودی انتهای میله با تنش برشی به صورت زیر است

$$\frac{F}{A} = G\frac{\Delta x}{L}$$

که در آن G مدول برشی است.

$$۶/۵\times۱۰^۶ = (۳\times۱۰^{۱۰})\frac{\Delta x}{۰/۰۵۳} \Rightarrow \Delta x = ۱/۱۵\times۱۰^{-۵}\text{ m}$$

۴۴●- شکل ۱۲-۵۴، منحنی تغییرات تنش- کرنش را برای ماده‌ای نشان می‌دهد. مقیاس محور تنش با $s = ۳۰۰$ بایکای $۱۰^۶\text{ N/m}^۲$ مشخص شده است. (الف) مدول یانگ و (ب) استقامت تسلیم تقریبی این ماده چقدر است؟



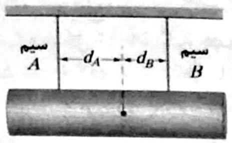
شکل ۱۲-۵۴ مسئلهٔ ۴۴

حل: (الف) مدول یانگ برابر شیب منحنی تنش- کشیدگی یا کرنش است و در اینجا از روی نمودار داریم

$$E = \tan\theta = \frac{(۳۰۰-۰)\times۱۰^۶}{(۰/۰۰۴-۰)} = ۷/۵\times۱۰^{۱۰}\text{ N/m}^۲$$

(ب) با توجه به نمودار گسترهٔ خطی منحنی تا حدود $۳۰۰\times۱۰^۶\text{ N/m}^۲$ می‌باشد لذا پایداری (تنش) تسلیم تقریباً برابر همین مقدار است.

۴۵●●- در شکل ۱۲-۵۵ کندهٔ یکنواخت درختی به جرم ۱۰۳kg به وسیلهٔ دو سیم فولادی A و B، هر یک به شعاع $۱/۲۰\text{mm}$ آویزان است. در ابتدا، طول سیم A، $۲/۵\text{m}$ و $۲/۰۰\text{mm}$ کوتاهتر از سیم B است. در این موقع کندهٔ درخت افقی است. بزرگی نیروهایی که به وسیلهٔ (الف) سیم A و (ب) سیم B به کندهٔ درخت وارد می‌شود، چقدر است؟ (پ) نسبت d_A/d_B چقدر است؟ GO



شکل ۱۲-۵۵ مسئلهٔ ۴۵

حل: (الف) داریم

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \frac{FL}{AE}$$

لذا داریم $\Delta L_A = \frac{F_A L_A}{A_A E_A}$ و $\Delta L_B = \frac{F_B L_B}{A_B E_B}$ که در آن F_A و F_B نیروهای وارد بر تنه درخت هستند و چنانچه ΔL را مقدار طولی بگیریم که در ابتدا B از A بلندتر بوده، در اینصورت می‌توان نوشت

$$\Delta L_A = \Delta L_B + \Delta L \Rightarrow \frac{F_A L_A}{A_A E_A} = \frac{F_B L_B}{A_B E_A} + \Delta L$$

در اینجا $A_A = A_B$ و $E_A = E_B$ است لذا خواهیم داشت

$$\frac{F_A L_A}{AE} = \frac{F_B L_B}{AE} + \Delta L$$

چون تنهٔ درخت در حال تعادل است لذا از تعادل نیروها در راستای قائم داریم

$$F_A + F_B - mg = ۰ \qquad F_B = mg - F_A$$

از جایگزینی F_B در رابطه بالا خواهیم داشت

$$\frac{F_A L_A}{AE} = \frac{(mg - F_A)L_B}{AE} + \Delta L \Rightarrow F_A = \frac{mgL_B + AE\Delta L}{L_A + L_B}$$

$$F_A = \frac{(۱۰۳)(۹/۸)(۲/۵) + \pi(۱/۲\times۱۰^{-۳})^۲(۲۰۰\times۱۰^۹)(۲\times۱۰^{-۳})}{۲/۵ + ۲/۵}$$

$$= ۸۶۷\text{N}$$

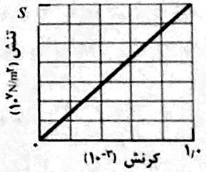
(ب) $F_B = mg - F_A = (۱۰۳)(۹/۸) - ۸۶۷ = ۱۴۳\text{N}$

(پ) از شرط تعادل دورانی حول مرکز جرم تنه درخت داریم

$$F_A d_A - F_B d_B = ۰$$

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{F_B}{F_A} = \frac{۱۴۳}{۸۶۷} = ۰/۱۶۵$$

۴۶●●- شکل ۱۲-۵۶ نمودار تنش برحسب کرنش را برای یک سیم آلومینیومی نشان می‌دهد که از دو طرف توسط دستگاه کشش در دو جهت مختلف کشیده شده است. مقیاس محور تنش با $s = ۷/۰$ بایکای $۱۰^۷\text{ N/m}^۲$ مشخص شده است. سیم دارای طول اولیهٔ $۰/۸۰۰\text{m}$ و مساحت سطح مقطع اولیهٔ آن $۲/۰۰\times۱۰^{-۶}\text{m}^۲$ است. دستگاه برای ایجاد کرنش $۱/۰۰\times۱۰^{-۳}$ در میله چقدر کار روی آن انجام می‌دهد؟



شکل ۱۲-۵۶ مسئلهٔ ۴۶

حل: چنانچه σ را تنش برشی در نظر بگیریم، داریم

$$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \sigma A$$

از طرفی برای کرنش نیز می‌توان نوشت

$$dE = \frac{dL}{L_۰} \Rightarrow dL = L_۰ dE$$

$$W = \int F dL = AL_۰\int\sigma\, dE$$

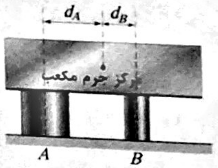
حاصل انتگرال برابر با مساحت زیر نمودار تنش- کرنش است یعنی داریم

$$\int\sigma\, dE = \frac{۱}{۲}(۱\times۱۰^{-۳})(۷\times۱۰^۷) = ۳/۵\times۱۰^۴\text{ N/m}^۲$$

در نتیجه کار انجام شده برابر است با

$$W = (۲\times۱۰^{-۶})(۰/۸)(۳/۵\times۱۰^۴) = ۵/۶\times۱۰^{-۲}\text{ J}$$

۴۷●●- در شکل ۱۲-۵۷، مکعبی از سرب به طور افقی روی استوانه‌های A و B قرار دارد. میان مساحت سطحهای بالایی استوانه‌ها رابطهٔ $A_A = ۲A_B$ برقرار است. مدولهای یانگ استوانه‌ها به وسیلهٔ رابطهٔ $E_A = ۲E_B$ به هم مربوط‌اند. استوانه‌ها قبل از آنکه مکعب روی آنها قرار داده شود طولهای یکسانی دارند. چه کسری از جرم مکعب به وسیلهٔ (الف) استوانهٔ A، و (ب) استوانهٔ B تحمل می‌شود؟ فاصلهٔ افقی مرکز جرم مکعب و محور مرکزی استوانه‌های A و B به ترتیب d_A و d_B است. (پ) نسبت d_A/d_B چقدر است؟



شکل ۱۲-۵۷ مسئلهٔ ۴۷

حل: (الف) و **(ب)**

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{AE}$$

با توجه به داده‌های مسئله

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{F_A}{A_A E_A} = \frac{F_B}{A_B E_B} \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} = \frac{A_A E_A}{A_B E_B}$$

و همچنین $A_A = ۲A_B$ و $E_A = ۲E_B$ لذا خواهیم داشت

$\frac{F_A}{F_B}=\frac{(۲A_B)(۲E_B)}{A_BE_B}=۴$ $\qquad F_A=۴F_B$

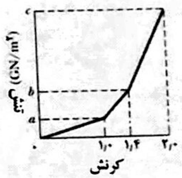
از تعادل نیروها داریم $W=F_A+F_B$ که با ترکیب معادله‌ها $F_B=۰/۲w$ و $F_A=۰/۸w$ به دست می‌آید.

(پ) از شرط تعادل دورانی حول مرکز جرم مکعب داریم

$F_Ad_A-F_Bd_B=۰$

$F_Ad_A=F_Bd_B\Rightarrow \frac{d_A}{d_B}=\frac{F_B}{F_A}=\frac{۰/۲w}{۰/۸w}=۰/۲۵$

۴۸●●- شکل ۱۲-۵۸ نمودار تقریبی تنش برحسب کرنش یک تار عنکبوت را نشان می‌دهد که در کرنش ۲/۰۰ تار پاره می‌شود. محور عمودی با $a=۰/۱۲GN/m^۲$، $b=۰/۳۰ GN/m^۲$ و $c=۰/۸۰GN/m^۲$ مشخص شده است. فرض کنید طول اولیهٔ تار ۰/۸۰cm، مساحت مقطع اولیهٔ آن $۸/۰\times۱۰^{-۱۲}m^۲$ و (در ضمن کشیده شدن) حجم آن ثابت است. همچنین فرض کنید که هرگاه یک تار، حشره‌ای در حال پرواز را بگیرد، انرژی جنبشی حشره موجب کشیده شدن تار می‌شود. (الف) برای در آستانهٔ پاره شدن قرار گرفتن تار چقدر انرژی جنبشی لازم است؟ انرژی جنبشی (ب) یک حشرهٔ میوه‌خوار به جرم ۶/۰۰mg و تندی ۱/۷۰m/s و (پ) زنبور وزوز کننده به جرم ۰/۳۸۸g و تندی ۰/۴۲۰m/s چقدر است؟ آیا (ت) حشرهٔ میوه‌خوار و (ث) زنبور وزوز کننده تار را پاره می‌کنند؟



شکل ۱۲-۵۸ مسئلهٔ ۴۸

حل: (الف) فرض می‌کنیم، زمانی که حشره به تار برخورد می‌کند. تمام انرژی جنبشی آن در تار ذخیره شود. بنابراین باید انرژی ذخیره شده در تار را محاسبه کنیم. از مسئله ۴۶ برای کار انجام شده روی تار داریم:

$W=AL_۰\int\sigma\, dE$

حاصل انتگرال برابر است با:

$\frac{۱}{۲}(۰/۱۲)۱۰^{۱۲}+\frac{۱}{۲}(۰/۴)(۰/۳۲)\times۱۰^{۱۲}$

$+\frac{۱}{۲}(۰/۶)(۱/۱)\times۱۰^{۱۲}=۰/۴۵۴\times۱۰^{۱۲}$

بنابراین انرژی ذخیره شده در تار برابر است با:

$U=W=۸\times۱۰^{-۱۲}(۸\times۱۰^{-۳})(۰/۴۵۴)\times۱۰^{۱۲}=۲/۹\times۱۰^{-۱}J$

(ب)

$K=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{۱}{۲}(۶)۱۰^{-۶}(۱/۷)^۲=۸/۶۷\times۱۰^{-۶}J$

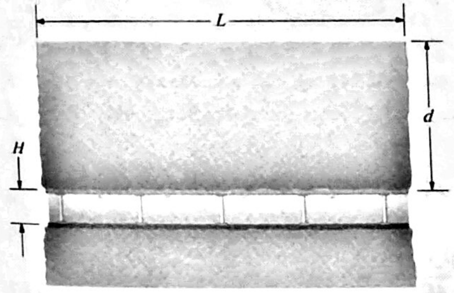
(پ)

$K=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{۱}{۲}(۰/۳۸۸)۱۰^{-۳}(۰/۴۲)^۲=۳/۴\times۱۰^{-۵}J$

(ت) ملاحظه می‌شود، انرژی جنبشی حشره کمتر از انرژی ذخیره شده در تار است، پس تار پاره نمی‌شود.

(ث) انرژی جنبشی مجدداً کمتر از انرژی ذخیره شده است. پس تار پاره نمی‌شود.

۴۹●●- تونلی به طول $L=۱۵۰m$، ارتفاع $H=۷/۲m$ و پهنای ۵/۸m (با سقف مسطح) در عمق $d=۶۰m$ زیرزمین ساخته شده است. (به شکل ۱۲-۵۹ نگاه کنید.) تمام سقف تونل به وسیلهٔ ستونهای فولادی مربع شکلی با مساحت سطح مقطع $۹۶۰cm^۲$ نگهداشته می‌شود. جرم $۱cm^۳$ مادهٔ زمین برابر ۲/۸g است. (الف) وزن کلی که ستونها باید تحمل کنند، چقدر است؟ (ب) چند ستون مورد نیاز است تا اینکه تنش تراکمی وارده به هر ستون به اندازهٔ نصف استقامت نهایی باقی بماند؟



شکل ۱۲-۵۹ مسئلهٔ ۴۹

حل: (الف) وزنی که ستونها تحمل می‌کنند برابر وزن خاکی است که بالای ستونها قرار دارد.

$W=mg=\rho Vg=\rho Adg$

$=(۲۸۰۰)(۱۵۰\times۵/۸)(۶۰)(۹/۸)=۱/۴۳\times۱۰^۹ N$

که در آن $\rho=۲/۸g/cm^۳=۲۸۰۰kg/m^۳$ قرار داده شده است.

(ب) برای اینکه تنش تراکمی وارد بر هر ستون برابر نصف نیروی پایداری نهایی باشد باید رابطه $\frac{F}{A}=\frac{۱}{۲}S_u$ برقرار باشد، که F نیروی وارد بر هر ستون و A مساحت سطح مقطع آن است.

در نتیجه داریم

$F=\frac{۱}{۲}AS_u=\frac{۱}{۲}(۹۶۰\times۱۰^{-۴})(۴۰۰\times۱۰^۶)$

$=۱/۹۲\times۱۰^۷ N$

و چون نیروی کل وارد بر ستونها برابر $۱/۴۳\times۱۰^۹$ N است، لذا تعداد ستونها چنین می‌شود

$n=\frac{۱/۴۳\times۱۰^۹}{۱/۹۲\times۱۰^۷}=۷۵$

۵۰●●●- شکل ۱۲-۶۰ حشره‌ای را در وسط تار عنکبوت نشان می‌دهد. تار تحت تنش $۸/۲۰\times۱۰^۸ N/m^۲$ و کرنش ۲/۰۰ پاره می‌شود. تار در ابتدا افقی و طول آن ۲/۰۰cm و مقطع آن $۸/۰۰\times۱۰^{-۱۲}m^۲$ بوده است. وقتی تار بر اثر وزن حشره کشیده می‌شود، حجم آن ثابت می‌ماند. اگر وزن حشره آن را در آستانهٔ پاره شدن قرار دهد، جرم حشره چقدر است؟ (اگر حشره‌ای مانند زنبور وزوز کننده در تار گرفتار شود، تار عنکبوت پاره می‌شود).

شکل ۱۲-۶۰ مسئلهٔ ۵۰

حل: رابطهٔ بین تنش و کرنش عبارت است از:

$\frac{\Delta L}{L_۰}=\frac{۱}{E}\frac{F}{A}$

$\frac{\Delta L}{L_۰}$ کرنش و $\frac{F}{A}$ تنش است.

با استفاده از شرایط داده شده، مدول یانگ را برای این تار بدست می‌آوریم:

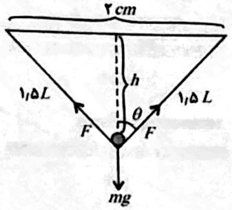
$E=\frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L_۰}}=\frac{۸/۲\times۱۰^۸}{۲}=۴/۱\times۱۰^۸ N/m^۲$

از تعریف کرنش، طول نهایی تار را بدست می‌آوریم:

$\frac{\Delta L}{L_۰}=۲\Rightarrow \Delta L=L-L_۰=۲L_۰\Rightarrow L=۳L_۰$

یعنی طول نهایی تار $۳L_۰$ است.

اکنون با استفاده از رابطهٔ نیرو و تعادل، نیروی وارد بر تار یعنی F را می‌یابیم.



$۲F\cos\theta=mg$

از رابطهٔ هندسی بدست می‌آوریم:

$\cos\theta=\frac{h}{۱/۵L}=\frac{\sqrt{۱/۲۵}}{۱/۵}=۰/۷۴۵$

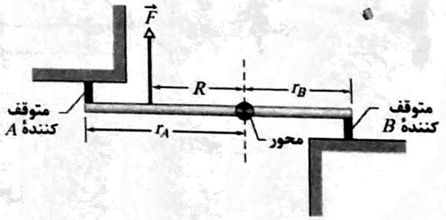
$\Rightarrow F=\frac{mg}{۲\cos\theta}=\frac{۹/۸m}{۲\times۰/۷۴۵}=(۶/۵۸m)N$

اکنون این مقدار نیرو را در رابطهٔ $\frac{\Delta L}{L}=\frac{۱}{E}\frac{F}{A}$ قرار می‌دهیم و جرم را می‌یابیم.

$۲=\frac{۱}{E}\frac{۶/۵m}{۸\times۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow ۶/۵m=۲\times۴/۱\times۱۰^۸\times۸\times۱۰^{-۱۲}$

$m=۱\times۱۰^{-۳}kg=۱g$

۵۱●●●- شکل ۱۲-۶۱ دید از بالای یک میلهٔ صلب است که حول محور قائمی می‌چرخد تا اینکه متوقف کننده‌های لاستیکی مشابه A و B که در فاصله‌های $r_A=۷/۰cm$ و $r_B=۴/۰cm$ از محور واقع‌اند به دیوارهای صلبی فشرده شوند. در ابتدا متوقف کننده‌ها بدون فشرده شدن با دیوار تماس دارند. وقتی نیروی $\vec{F}$ با بزرگی ۲۲۰N عمود بر میله و به فاصلهٔ $R=۵/۰cm$ از محور به آن وارد شود، مطلوب است تعیین بزرگی نیرویی که (الف) متوقف کنندهٔ A و (ب) متوقف کنندهٔ B را فشرده می‌کند.



شکل ۱۲-۶۱ مسئلهٔ ۵۱

حل: F_A و F_B را به ترتیب نیروهایی در نظر می‌گیریم که ضربه‌گیرهای A و B را متراکم می‌کنند. از شرط تعادل دورانی حول محور داریم

$RF=r_AF_A+r_BF_B$

$(۵)(۲۲۰)=(۷)F_A+(۴)F_B\Rightarrow ۷F_A+۴F_B=۱۱۰۰$ (۱)

چنانچه فرض کنیم میله به اندازه ΔS چرخش داشته باشد مقدار فشردگی هر ضربه‌گیر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$\Delta S_A=r_A\Delta\theta$ و $\Delta S_B=r_B\Delta\theta$

ثابت‌های فنر یکسان هستند لذا داریم

$F_A=k\Delta S_A=kr_A\Delta\theta$

$F_B=k\Delta S_B=kr_B\Delta\theta$

از تقسیم کردن دو رابطه بر هم خواهیم داشت

$\frac{F_A}{F_B}=\frac{r_A}{r_B}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow F_B=\frac{۴}{۷}F_A$

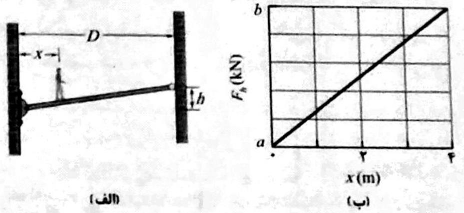
(الف) این نتیجه را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم

$۷F_A+۴\left(\frac{۴}{۷}\right)F_A=۱۱۰۰\Rightarrow F_A=۱۱۸N$

(ب) $F_B=\frac{۴}{۷}(۱۱۸)=۶۸N$

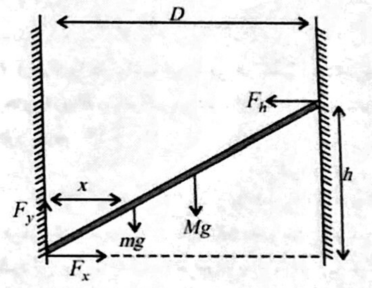
۵۲- شکل ۱۲-۶۲ الف سطح شیبدار یکنواختی را میان دو ساختمان نشان می‌دهد که در مواقع لزوم از آن استفاده می‌کنند. سطح شیبدار در سمت چپ به دیوار ساختمان لولا شده است و در سمت راست غلتکی وجود دارد که می‌تواند روی دیوار ساختمان بغلتد. هیچ نیروی قائمی از طرف ساختمان به غلتک

وارد نمی‌شود، فقط یک نیروی افقی اعمال می‌شود که بزرگی آن برابر F_h است. فاصلهٔ افقی میان دو ساختمان برابر $D = ۴/۰۰\text{m}$ است. سطح شیبدار می‌تواند تا ارتفاع $h = ۰/۴۹۰\text{m}$ بالا برود. مردی از سمت چپ روی سطح شیبدار قدم می‌زند. شکل ۱۲-۶۲ ب، F_h را برحسب تابعی از فاصلهٔ افقی x از دیوار نشان می‌دهد. مقیاس محور F_h با $a = ۲۰\text{kN}$ و $b = ۲۵\text{kN}$ مشخص شده است. (الف) جرم سطح شیبدار و (ب) جرم مرد چقدر است؟



شکل ۱۲-۶۲ مسئلهٔ ۵۲

حل:



(الف) از شرط تعادل دورانی حول لولا داریم

$$F_h h - mgx - \frac{۱}{۲}MgD = ۰$$

$$\Rightarrow ۰/۴۹ F_h - m(۹/۸)x - \frac{۱}{۲}M(۹/۸)(۴) = ۰$$

که در آن m جرم مرد و M جرم سطح شیبدار و F_h نیروی افقی وارد بر لبهٔ راست سطح شیبدار از طرف دیواره است. با استفاده از نمودار به ازای $x = ۰$ داریم $F_h = ۲۰ \times ۱۰^۳\text{N}$ که در رابطه بالا قرار دهیم M به دست می‌آید

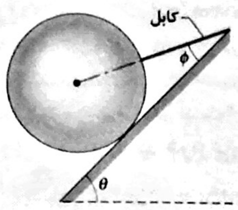
$$(۰/۴۹)(۲۰\times۱۰^۳) - ۱۹/۶M = ۰ \Rightarrow M = ۵۰۰\text{kg}$$

(ب) مجدداً با استفاده از نمودار به ازای $x = ۴$ داریم $F_h = ۲۵\times۱۰^۳\text{ N}$ در نتیجه خواهیم داشت

$$(۰/۴۹)(۲۵\times۱۰^۳) - m(۹/۸)(۴) - (۱۹/۶)(۵۰۰) = ۰$$

$$\Rightarrow m = ۶۲/۵\text{kg}$$

۵۳- در شکل ۱۲-۶۳ کره‌ای به جرم ۱۰kg روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی که با افق زاویهٔ $\theta = ۴۵°$ می‌سازد، قرار دارد. زاویهٔ ϕ برابر ۲۵° است. نیروی کشش در کابل را به دست آورید.



شکل ۱۲-۶۳ مسئلهٔ ۵۳

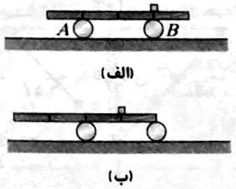
حل: محور x را موازی سطح شیبدار و جهت مثبت را رو به بالا در نظر می‌گیریم. از شرط تعادل انتقالی در راستای این محور داریم

$$T\cos\phi - mg\sin\theta = ۰$$

$$T\cos ۲۵° - (۱۰)(۹/۸)\sin ۴۵° = ۰$$

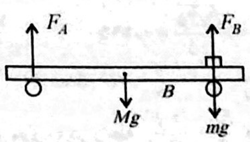
$$T = ۷۶/۵\text{ N}$$

۵۴- در شکل ۱۲-۶۴ الف، تیر یکنواختی به جرم ۴۰/۰kg روی دو غلتک قرار دارد و مرکز آن از دو غلتک به یک فاصله است. خطهای قائم روی تیر آن را به طولهای مساوی تقسیم می‌کند. دو تا از خطها در بالای غلتکها قرار دارند؛ بسته‌ای به جرم ۱۰/۰kg در بالای غلتک B واقع است. بزرگی نیروهایی که از طرف (الف) غلتک A و (ب) B بر تیر وارد می‌شوند چقدرند؟ سپس تیر به سمت چپ حرکت داده می‌شود تا انتهای سمت راست آن درست در بالای B قرار گیرد (شکل ۱۲-۶۴ ب). حالا بزرگی نیروهایی که از طرف (پ) غلتک A و (ت) غلتک B بر تیر وارد می‌شوند چقدرند؟ سپس تیر به راست حرکت داده می‌شود. فرض کنید طول تیر برابر ۰/۸۰۰m است. (پ) در چه فاصلهٔ افقی میان بسته و غلتک B تیر در آستانهٔ جدایی از غلتک A قرار می‌گیرد؟



شکل ۱۲-۶۴ مسئلهٔ ۵۴

حل:



$M = ۴۰/۰\text{kg}$ $L = ۰/۸۰\text{m}$ $m = ۱۰/۰\text{kg}$

(الف) با توجه به اینکه دستگاه در حال تعادل ایستایی است لذا نیروی عمودی وارد بر تیر از طرف غلتک A برابر نصف وزن تیر است.

$$F_B = \frac{۱}{۲}Mg = \frac{۱}{۲}(۴۰)(۹/۸) = ۱۹۶\text{ N}$$

(ب) نیروی عمودی وارد بر تیر از طرف غلتک B برابر نصف وزن تیر به علاوهٔ وزن بسته است.

$$F_B = \frac{۱}{۲}Mg + mg = ۱۹۶ + (۱۰)(۹/۸) = ۲۹۴\text{N}$$

(پ) وقتی طرف راست تیر به بالای غلتک B می‌رسد، داریم

$$F_A = Mg + \frac{۱}{۲}mg$$
$$= (۴۰)(۹/۸) + \frac{۱}{۲}(۱۰)(۹/۸) = ۴۴۱\text{ N}$$

(ت) برای F_B داریم

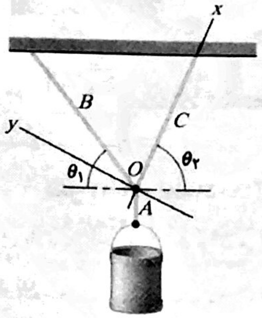
$$F_B = \frac{۱}{۲}mg = \frac{۱}{۲}(۱۰)(۹/۶) = ۴۹\text{ N}$$

(ث) وقتی تیر در آستانه جدا شدن از غلتک A است، $F_A = ۰$ و از شرط تعادل دورانی حول محوری که از غلتک B می‌گذرد، داریم

$$mgx = Mg\left(\frac{L}{۴} - x\right)$$

$$x = \frac{LM}{۴(M+m)} = \frac{(۰/۸)(۴۰)}{۴(۴۰+۱۰)} = ۰/۱۶\text{m}$$

۵۵- در شکل ۱۲-۶۵ یک بشکهٔ بنایی به جرم ۸۱۷ kg به کابل A آویخته شده که آن هم در نقطه O به دو کابل دیگر B و C که با افق زاویه‌های $\theta_۱ = ۵۱/۰°$ و $\theta_۲ = ۶۶/۰°$ می‌سازند، متصل است. مطلوب است تعیین نیروی کشش در (الف) کابل A، (ب) کابل B و (پ) کابل C. (راهنمایی: برای پرهیز از حل دو معادلهٔ دو مجهولی، وضعیت محورها را مطابق شکل اختیار کنید.) SSM



شکل ۱۲-۶۵ مسئلهٔ ۵۵

حل: شرط تعادل نیروها را در نظر می‌گیریم

(الف)

$$T_A = mg = (۸۱۷)(۹/۸) = ۸۰۰۶\text{N}$$

(ب)

$$T_C\cos\theta_۱ - T_B\cos\theta_۲ = ۰$$

$$T_C\cos ۶۶° - T_B\cos ۵۱° = ۰ \qquad T_C = ۱/۵۵T_B$$

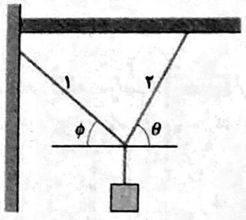
$$T_C\sin\theta_۱ + T_B\sin\theta_۲ = mg$$

$$۱/۵۵T_B\sin ۶۶° + T_B\sin ۵۱° = ۸۰۰۶ \Rightarrow T_B = ۳۶۵۰\text{ N}$$

(ب)

$$T_C = (۱/۵۵)(۳۶۵۰) = ۵۶۵۸\text{ N}$$

۵۶- در شکل ۱۲-۶۶، بسته‌ای به جرم m از ریسمان کوتاهی آویزان است. این ریسمان از طریق ریسمانهای ۱ و ۲ به سقف متصل است. ریسمان ۱ با افق زاویهٔ $\phi = ۴۰°$ می‌سازد؛ زاویهٔ ریسمان ۲ برابر θ است. (الف) برای چه مقدار θ کشش در ریسمان ۲ کمینه است؟ (ب) نیروی کشش کمینه در ریسمان ۲ برحسب mg چقدر است؟



شکل ۱۲-۶۶ مسئلهٔ ۵۶

حل: (الف) از شرط تعادل نیروها در امتداد قائم و افق داریم

$$T_۱\sin\phi + T_۲\sin\theta = mg \Rightarrow T_۱\sin\phi = mg - T_۲\sin\theta$$

$$T_۱\cos\phi - T_۲\cos\theta = ۰ \Rightarrow T_۱\cos\phi = T_۲\cos\theta$$

دو رابطه را بر هم تقسیم کرده و معادلهٔ حاصل را برای $T_۲$ حل کنیم خواهیم داشت

$$\tan\phi = \frac{mg - T_۲\sin\theta}{T_۲\cos\theta} \Rightarrow T_۲ = \frac{mg}{\cos\theta\tan ۴۰° + \sin\theta}$$

برای به دست آوردن کمینهٔ $T_۲$ باید $dT_۲/d\theta = ۰$ قرار داد.

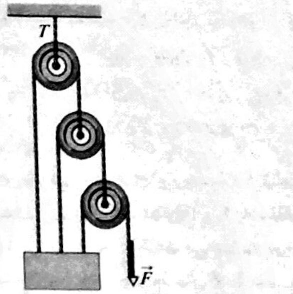
$$\frac{dT_۲}{d\theta} = -\frac{mg(\cos\theta - \sin\theta\tan ۴۰°)}{(\cos\theta\tan ۴۰° + \sin\theta)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{۱}{\tan ۴۰°} \Rightarrow \theta = ۵۰°$$

(ب) بزرگی $T_۲$ به ازای $\theta = ۵۰°$ برابر است با

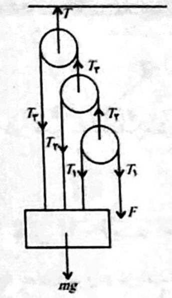
$$T_۲ = \frac{mg}{\cos ۵۰°\tan ۴۰° + \sin ۵۰°} = ۰/۷۶۶\text{mg}$$

۵۷- نیروی $\vec{F}$ در شکل ۱۲-۶۷ می‌تواند قطعه‌ای به جرم ۶/۴kg و قرقره‌های با جرم ناچیز را در حال تعادل نگهدارد. اصطکاک قابل ملاحظه‌ای وجود ندارد. نیروی کشش T وارد به کابل بالایی را به دست آورید. (راهنمایی: وقتی کابل نیم‌دور روی قرقره پیچیده شود، بزرگی نیروی خالص وارد بر قرقره دو برابر نیروی کشش در کابل است.) ILW



شکل ۱۲-۶۷ مسئلهٔ ۵۷

حل:



$F = T_۱$ $\qquad$ $T_۲ = ۲T_۱ = ۲F$

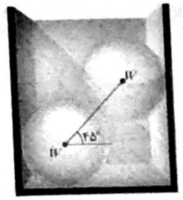
$T_۲ = ۲T_۱ = ۲F$ $\qquad$ $T_۳ = ۲T_۲ = ۴F$

$T_۱ + T_۲ + T_۳ = mg$ $\qquad$ $F + ۲F + ۴F = mg$

$F = \frac{۱}{۷}mg$ $\qquad$ $T_۳ = \frac{۴}{۷}mg$

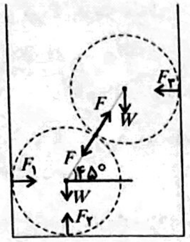
$$T = ۲T_۳ = \frac{۸}{۷}mg = \frac{۸}{۷}(۶/۴)(۹/۸) = ۷۲\,N$$

۵۸- در شکل ۱۲-۶۸، دو کرهٔ مشابه یکنواخت و بدون اصطکاک، هر یک به جرم m، داخل یک مکعب مستطیل شکل صلب به حالت سکون قرار دارند. خط وصل کنندهٔ مرکز کره‌ها با افق زاویهٔ ۴۵° می‌سازد. مطلوب است تعیین بزرگی نیروهای وارد بر کره از طرف (الف) کف مکعب، (ب) سمت چپ مکعب، (پ) سمت راست مکعب و (ت) به یکدیگر. (راهنمایی: نیروی وارد از یک کره بر دیگری روی خط مرکز به مرکز آنها قرار دارد.)



شکل ۱۲-۶۸ مسئلهٔ ۵۸

حل:



(الف) با توجه به نمودار نیروها، از شرط تعادل دو کره در راستای افق و قائم داریم

$-F_۲ + F_۱ = ۰$ $\qquad$ $F_۱ = F_۲$

$-۲W + F_۳ = ۰$ $\qquad$ $F_۳ = ۲W = ۲mg$

(ب) از شرط تعادل انتقالی برای کره پایینی داریم

$F_۱ = F\cos ۴۵°$

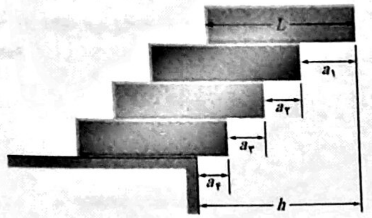
$F\sin(۴۵°) = mg \Rightarrow F = \sqrt{۲}mg$

$F_۱ = \sqrt{۲}mg \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = mg$

(پ) $F_۲ = mg$

(ت) $F = \sqrt{۲}mg$

۵۹- چهار آجر مشابه یکنواخت که طول هر یک L است، طوری روی یکدیگر قرار گرفته‌اند (شکل ۱۲-۶۹) که قسمتی از هر آجر از لبهٔ آجر زیری جلوتر است. مطلوب است، برحسب L، تعیین مقدارهای بیشینهٔ (الف) $a_۱$، (ب) $a_۲$، (پ) $a_۳$، (ت) $a_۴$ و (ث) h، به طوری که مجموعه در حال تعادل باشد.



شکل ۱۲-۶۹ مسئلهٔ ۵۹

حل: (الف) برای بالاترین آجر مرکز جرم آن می‌تواند روی لبهٔ آجر زیرین باشد لذا $a_۱ = \frac{L}{۲}$

(ب) مرکز جرم دو آجر بالایی باید روی لبهٔ آجر پایینتر از آن دو قرار داشته باشد. مبدأ را روی لبهٔ آجر دوم در نظر می‌گیریم، در نتیجه داریم

$$a_۲ = \frac{M\left(\frac{L}{۲}\right) + M(۰)}{M + M} = \frac{L}{۴}$$

(پ) مرکز جرم سه آجر بالایی باید روی لبهٔ آجر پایینتر باشد با انتخاب مبدأ روی مرکز دو آجر بالایی خواهیم داشت

$$a_۳ = \frac{M\left(\frac{L}{۲}\right) + M(۰)}{M + M + M} = \frac{L}{۶}$$

(ت) با روش مشابه داریم

$$a_۴ = \frac{M\left(\frac{L}{۲}\right) + M(۰)}{M + M + M + M} = \frac{L}{۸}$$

(ث) برای جلورفتگی h داریم

$$h = \frac{L}{۲} + \frac{L}{۴} + \frac{L}{۶} + \frac{L}{۸} = \frac{۲۵}{۲۴}L$$

۶۰- یک صخره نورد به جرم ۹۵ kg پس از سقوط متوجه می‌شود که از انتهای طنابی آویزان است که ۱۵ m طول و ۹/۶ mm قطر دارد و ۲/۸ cm کشیده شده است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) تنش و (ب) کرنش و (پ) مدول یانگ در طناب.

حل: (الف) تنش یعنی نیروی وارد سطح. در اینجا وزن صخره‌نورد به سطح مقطع طناب وارد می‌شود.

$$F = mg = ۹۵ \times ۹/۸ = ۹۳۱\,N$$

سطح برابر است با:

$$A = \pi r^۲ = ۳/۱۴(۴/۸ \times ۱۰^{-۳})^۲ = ۷/۲ \times ۱۰^{-۵}\,m^۲$$

تنش برابر است با: $\frac{F}{A} = \frac{۹۳۱}{۷/۲ \times ۱۰^{-۵}} = ۱/۲۹ \times ۱۰^۶\,N/m^۲$

(ب) کرنش در اینجا برابر است با $\frac{\Delta L}{L}$ که ΔL تغییر طول طناب و L طول اولیهٔ طناب است.

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{۲/۸ \times ۱۰^{-۲}}{۱۵} = ۱/۸۷ \times ۱۰^{-۳}$$

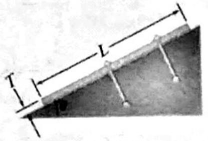
(پ) رابطهٔ بین تنش و کرنش برابر است با:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{۱}{E}\frac{F}{A}$$

که E مدول یانگ است.

$$E = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{۱/۲۹ \times ۱۰^۶}{۱/۸۷ \times ۱۰^{-۳}} = ۶/۷ \times ۱۰^۸\,N/m^۲$$

۶۱- در شکل ۱۲-۷۰، قطعهٔ مستطیل شکلی از یک تخته سنگ روی صخرهٔ شیبداری با زاویهٔ $\theta = ۲۶°$ قرار دارد. قطعه دارای طول $L = ۴۳\,m$، ضخامت $T = ۲/۵\,m$ و پهنای $W = ۱۲m$ است و $۱/۰\,cm^۳$ آن ۳/۲g جرم دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه و صخرهٔ زیری ۰/۳۹ است. (الف) مؤلفهٔ نیروی گرانشی قطعه را که موازی صخرهٔ شیبدار وارد می‌شود حساب کنید. (ب) بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر قطعه را حساب کنید. با مقایسهٔ (الف) و (ب) مشاهده می‌کنید که تخته سنگ در خطر لغزیدن است و برای جلوگیری از آن تنها این شانس وجود دارد که یک برآمدگی بین تخته سنگ و صخرهٔ زیر آن وجود داشته باشد. (پ) برای محکم کردن تخته سنگ، آن را با پیچهایی عمود بر صخرهٔ شیبدار، پیچ می‌کنیم. (دو پیچ نشان داده شده است) اگر هر پیچ سطح مقطعی برابر $۶/۴cm^۲$ داشته باشد و با تنش برشی $۳/۶ \times ۱۰^۸\,N/m^۲$ بشکند، کمترین تعداد پیچ مورد نیاز چند عدد است؟ فرض کنید پیچها در نیروی عمودی اثری ندارند. SSM



شکل ۱۲-۷۰ مسئلهٔ ۶۱

حل: (الف)

$m = \rho V = (۳/۲ \times ۱۰^۳)(۴۳ \times ۲/۵ \times ۱۲) = ۴/۱۳ \times ۱۰^۶\,kg$

$F_t = mg\sin\theta = (\rho V)g\sin\theta = (۴/۱۳ \times ۱۰^۶)(۹/۸)\sin ۲۶°$

$= ۱/۷۷ \times ۱۰^۷\,N$

(ب) $f_{s,max} = \mu_S F_N = \mu_S mg\cos\theta$

$= (۰/۳۹)(۴/۱۳ \times ۱۰^۶)(۹/۸)\cos ۲۶° = ۱/۴۲ \times ۱۰^۷\,N$

(پ) نیروی خالص که پیچهای تحمل می‌کنند برابر است با

$F_{net} = F_t - f_{s,max} = ۱/۷۷ \times ۱۰^۷ - ۱/۴۲ \times ۱۰^۷ = ۳/۵ \times ۱۰^۶\,N$

(ت) از طرف دیگر تنش برشی حدی که بر هر پیچ وارد می‌شود برابر است با

$$۳/۶ \times ۱۰^۸ = \frac{F}{A}$$

که در آن $A = ۶/۴ \times ۱۰^{-۴}\,m^۲$ است در نتیجه بیشترین نیروی برشی وارد بر هر پیچ برابر است با

$$F = (۳/۶ \times ۱۰^۸)(۶/۴ \times ۱۰^{-۴}) = ۲/۳ \times ۱۰^۵\,N$$

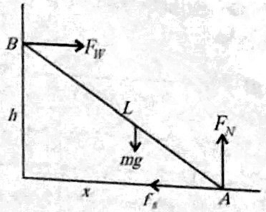
در نتیجه کمترین پیچ مورد نیاز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$n = \frac{F_{net}}{F} = \frac{۳/۵۵ \times ۱۰^۶}{۲/۳ \times ۱۰^۵} = ۱۵/۴۳$$

پس ۱۶ پیچ مورد نیاز است.

۶۲- نردبان یکنواختی که طول آن ۵/۰m و وزن آن ۴۰۰N است به دیوار بدون اصطکاکی تکیه دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان زمین و پای نردبان ۰/۴۶ است. بیشترین فاصله‌ای که پای نردبان می‌تواند از دیوار داشته باشد تا نلغزد، چقدر است؟

حل:



از شرط تعادلی انتقالی نیروها در دو راستای x و y داریم

$F_w = f_s$

$F_N = mg = 400\,\mathrm{N}$

از طرفی داریم

$f_s = \mu_s F_N = (0/46)(400) = 184\,\mathrm{N}$

در نتیجه خواهیم داشت

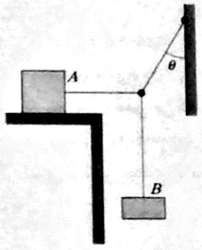
$F_w = f_s = 184\,\mathrm{N}$

اکنون از شرط تعادل دورانی نیروها حول نقطهٔ A داریم

$$mg\left(\frac{x}{2}\right) - F_w h = 0 \Rightarrow 200x - 184\sqrt{L^2 - x^2} = 0$$

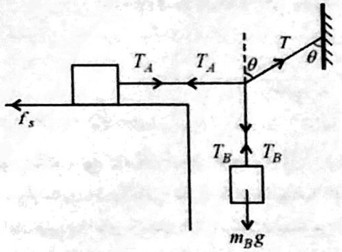
که در آن $h = \sqrt{L^2 - x^2}$ جایگزین شده است. با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $x = 3/4\,\mathrm{m}$.

۶۳- در شکل ۱۲-۷۱، قطعهٔ A (با جرم $10\,\mathrm{kg}$) در حال تعادل است، ولی هر جرم اضافی که به جسم B (با جرم $5\,\mathrm{kg}$) افزوده شود قطعه شروع به لغزیدن می‌کند. برای زاویهٔ $\theta = 30°$ ، ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم A و سطح زیرین آن، چقدر است؟ **SSM**



شکل ۱۲-۷۱ مسئلهٔ ۶۳

حل:



$T_B = m_B g = (5)(9/8) = 49\,\mathrm{N}$

$T_B = T\cos\theta \Rightarrow 49 = T\cos 30° \Rightarrow T = 56/6\,\mathrm{N}$

$T_A = T\sin\theta = (56/6)(\sin 30°) = 28/3\,\mathrm{N}$

$T_A = f_s = 28/3\,\mathrm{N}$

$$f_s = \mu_s(m_A g) \Rightarrow \mu_s = \frac{f_s}{m_A g} = \frac{28/3}{(10)(9/8)} = 0/29$$

۶۴- یک بالابر معدن به وسیلهٔ یک کابل فولادی به قطر $2/5\,\mathrm{cm}$ نگهداشته شده است. جرم کل اتاقک بالابر و محتویاتش رویهم $670\,\mathrm{kg}$ است. وقتی که بالابر (الف) با کابل $12\mathrm{m}$ و (ب) با کابل $362\mathrm{m}$ آویزان است، کابل چه مقدار کش می‌آید. (از جرم کابل چشمپوشی کنید.)

حل: رابطهٔ بین تنش و کرنش با استفاده از مدول یانگ، E، به صورت زیر است

$$E = \frac{\text{تنش}}{\text{کرنش}} = \frac{F/A}{\Delta L/L} \Rightarrow \Delta L = \frac{FL}{EA} = \frac{mgL}{EA}$$

که برای فولاد، $E = 200\times10^9\,\mathrm{N/m^2}$ و A برابر است با

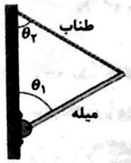
$$A = \pi r^2 = (3/14)\left(\frac{2/5}{2}\times10^{-2}\right)^2 = 4/9\times10^{-4}\,\mathrm{m^2}$$

(الف) به ازای $L = 12\,\mathrm{m}$ داریم

$$\Delta L = \frac{(670)(9/8)(12)}{(200\times10^9)(4/9\times10^{-4})} = 8\times10^{-4}\,\mathrm{m}$$

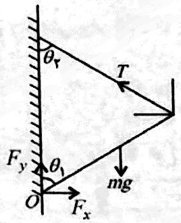
(ب) و به ازای $L = 362\,\mathrm{m}$ خواهیم داشت $\Delta L = 2/4\times10^{-2}\,\mathrm{m}$.

۶۵- در شکل ۱۲-۷۲ میلهٔ یکنواختی به جرم m در انتهای پایین آن به دیوار ساختمانی لولا شده و انتهای بالایی به وسیلهٔ طنابی متصل به دیوار نگهداشته شده است. اگر $\theta_1 = 60°$ باشد، مقدار زاویهٔ θ_2 باید چقدر باشد تا نیروی کشش در طناب برابر $mg/2$ شود؟ **SSM**



شکل ۱۲-۷۲ مسئلهٔ ۶۵

حل:



از شرط تعادل دورانی حول لولا در نقطهٔ O داریم

$$TL\sin(180 - \theta_1 - \theta_2) - mg\sin\theta_1\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

که به ازای $T = \frac{mg}{2}$ و $\theta_1 = 60°$ داریم $\theta_2 = 60°$.

۶۶- مردی به جرم $73\,\mathrm{kg}$ روی پلی به طول L ایستاده است. او در فاصلهٔ $L/4$ از یک انتها قرار دارد. پل یکنواخت است و $2/7\,\mathrm{kN}$ وزن دارد. بزرگی نیروهای قائم وارد بر پل به وسیلهٔ تکیه‌گاهای آن، (الف) در انتهای دورتر و (ب) انتهای نزدیکتر چقدر است؟

حل: (الف) شرط تعادل دورانی نیروها را حول تکیه‌گاه نزدیکتر می‌نویسیم.

$$F_1 L - mg\left(\frac{L}{4}\right) - W\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$F_1 = (73)(9/8)\left(\frac{1}{4}\right) - (2700)\left(\frac{1}{2}\right) = 1529\,\mathrm{N}$$

F_1 نیرویی است که بر تکیه‌گاه دورتر وارد می‌شود.

(ب) نیروی وارد بر تکیه‌گاه نزدیکتر، F_2 ، را از شرط تعادل انتقالی نیروها در راستای قائم به دست می‌آوریم

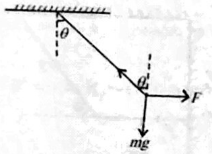
$F_2 + F_1 - mg - W = 0$

$F_2 + 1529 - (73)(9/8) - (2700) = 0$

$F_2 = 1890\,\mathrm{N}$

۶۷- یک تاب موقتی از یک حلقه در انتهای طنابی درست شده و سر دیگر طناب به شاخهٔ درختی بسته شده است. بچه‌ای وقتی طناب قائم است داخل حلقه می‌نشیند و پدرش با یک نیروی افقی او را به یک سمت می‌کشد. درست قبل از رها کردن بچه از حال سکون، طناب با قائم زاویه $15°$ می‌سازد و نیروی کشش در طناب برابر $280\,\mathrm{N}$ است. (الف) وزن بچه چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی (افقی) پدر روی بچه درست قبل از رهاکردن او، چقدر است؟ (پ) اگر نیروی بیشینهٔ افقی که پدر می‌تواند به بچه وارد کند $93\,\mathrm{N}$ باشد، بیشینهٔ زاویه‌ای که طناب می‌تواند، در وقتی پدر بچه را افقی می‌کشد، با قائم بسازد چقدر است؟

حل:



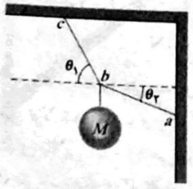
(الف) $T\cos\theta = mg \Rightarrow mg = (280)\cos15° = 270/5\,\mathrm{N}$

(ب) $F = T\sin\theta = (280)\sin15° = 72/5\,\mathrm{N}$

(پ) با استفاده از دو رابطهٔ فوق داریم

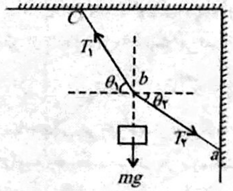
$$\tan\theta = \frac{F}{mg} = \frac{93}{270/5} = 0/344 \qquad \theta = 19°$$

۶۸- دستگاه شکل ۱۲-۷۳ در حال تعادل است. زاویه‌ها عبارت‌اند از $\theta_1 = 60°$ و $\theta_2 = 20°$ و گلولهٔ دارای جرم $M = 2/0\,\mathrm{kg}$ است. کشش در (الف) ریسمان ab و (ب) ریسمان bc چقدر است؟



شکل ۱۲-۷۳ مسئلهٔ ۶۸

حل:



(الف) از شرط تعادل نیروها می‌توان نوشت

$T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2$

$T_1\sin\theta_1 = T_2\sin\theta_2 + Mg$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم

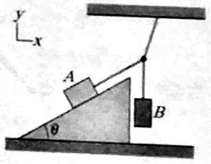
$$\cot\theta_1 = \frac{T_2\cos\theta_2}{T_2\sin\theta_2 + Mg}$$

با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $T_2 = 15\,\mathrm{N}$

(ب) اکنون می‌توان T_1 را محاسبه کرد که به دست می‌آید

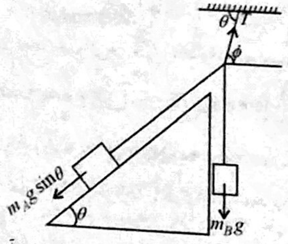
$T_1 = 28/5\,\mathrm{N}$

۶۹- شکل ۱۲-۷۴ آرایش ساکنی از دو جعبه و سه ریسمان را نشان می‌دهد. جعبهٔ A دارای جرم $11/0\,\mathrm{kg}$ است و روی سطح شیبداری با زاویهٔ $\theta = 30/0°$ قرار دارد؛ جعبهٔ B دارای جرم $7/00\,\mathrm{kg}$ و از ریسمان آویزان است. ریسمانی که به جعبهٔ A متصل است موازی سطح شیبدار است و سطح اصطکاک ندارد. (الف) نیروی کشش در ریسمان بالایی و (ب) زاویه‌ای که با افق می‌سازد چقدر است؟



شکل ۱۲-۷۴ مسئلهٔ ۶۹

حل:



(الف) ابتدا برایند دو نیروی پایینی را به دست می‌آوریم

$$\vec{R} = (m_A g\sin\theta)\cos\theta(-\hat{i}) + (m_A g\sin\theta)\sin\theta(-\hat{j}) + m_B g(-\hat{j})$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت

$\vec{R} = -46/7\hat{i} - 95/5\hat{j}$

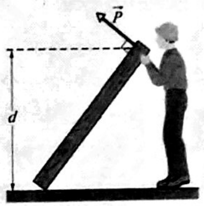
چون $|T|=|R|$ است لذا خواهیم داشت

$$T=\sqrt{(-۴۶/۷)^{۲}+(-۹۵/۵)^{۲}}=۱۰۶/۳\,N$$

(ب) جهت آن نیز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

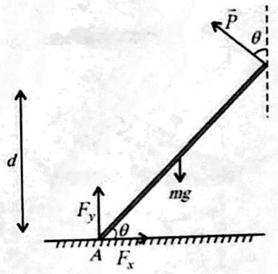
$$\phi=\tan^{-1}\frac{۹۵/۵}{۴۶/۷}=۶۴^\circ$$

۷۰- یک کارگر ساختمانی می‌خواهد تیری یکنواخت را از زمین بلند کند و آن را به وضعیت قائم در آورد. طول تیر برابر $d=۲/۵m$ و وزن آن ۵۰۰N است. در لحظه معینی کارگر با وارد کردن نیروی $\vec{P}$ عمود بر تیر آن را به طور لحظه‌ای ساکن نگه‌می‌دارد در حالی که به ترتیب نشان داده شده در شکل ۱۲-۷۵ سر تیر در فاصلهٔ $d=۱/۵۰m$ بالای کف قرار دارد. (الف) بزرگی P چقدر است؟ (ب) بزرگی نیرویی (خالص) که از طرف کف به تیر وارد می‌شود چقدر است؟ (پ) برای آنکه در این لحظه تیر نلغزد، کمینهٔ مقدار ضریب اصطکاک ایستایی میان تیر و کف باید چقدر باشد؟



شکل ۱۲-۷۵ مسئلهٔ ۷۰

حل:



$$\theta=\sin^{-1}\frac{d}{L}=\sin^{-1}\frac{۱/۵}{۲/۵}=۳۷^\circ$$

(الف) شرط تعادل دورانی را حول نقطهٔ A می‌نویسیم

$$PL-mg\left(\frac{L}{۲}\right)\cos\theta=۰ \qquad P=\frac{۱}{۲}mg\cos\theta$$

$$P=\frac{۱}{۲}(۵۰۰)\cos۳۷^\circ=۲۰۰N$$

(ب) شرط تعادل انتقالی نیروها را در راستای محور x و محور y می‌نویسیم

$$F_x=P\sin\theta=(۲۰۰)\sin۳۷^\circ=۱۲۰N$$
$$F_y=mg-P\cos\theta=۵۰۰-(۳۰۰)\cos۳۷^\circ=۳۴۰N$$
$$\vec F=(۱۲۰\hat i+۳۴۰\hat j)N$$
$$F=\sqrt{(۱۲۰)^{۲}+(۳۴۰)^{۲}}=۳۶۱N$$

(پ) $f_{s,max}=\mu_sF_N\Rightarrow F_x=\mu_sF_y\Rightarrow\mu_s=\frac{F_x}{F_y}$

$$\mu_s=\frac{۱۲۰}{۳۴۰}=۰/۳۵$$

۷۱- مکعب مسی صلبی دارای ضلعی به طول ۸۵/۵ cm است. چه مقدار تنش باید به آن وارد شود تا ضلع مکعب به ۸۵ cm کاهش یابد؟ مدول کپه‌ای مس برابر $۱/۴\times۱۰^{۱۱}N/m^{۲}$ است.

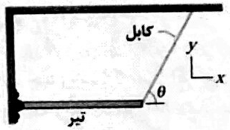
حل: برای تنش هیدرولیکی رابطهٔ زیر برقرار است

$$P=B\frac{\Delta v}{v_۰}$$

در نتیجه داریم

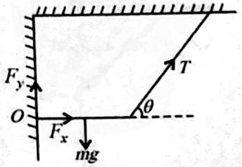
$$P=(۱/۴\times۱۰^{۱۱})\frac{(۸۵/۵)^{۳}-(۸۵)^{۳}}{(۸۵/۵)^{۳}}=۲/۴۴\times۱۰^{۹}N/m^{۲}$$

۷۲- یک تیر یکنواخت به طول ۵/۰m دارای جرم ۵۳ kg است. در شکل ۱۲-۷۶، تیر به وسیلهٔ لولا و کابلی با زاویهٔ $\theta=۶۰^\circ$ به طور افقی نگهداشته شده است. برحسب نماد بردار یکه، نیروی وارد به تیر از طرف لولا چقدر است؟



شکل ۱۲-۷۶ مسئلهٔ ۷۲

حل:



از شرط تعادل دورانی حول لولا در نقطهٔ O داریم

$$TL\sin\theta-mg\left(\frac{L}{۲}\right)=۰ \qquad T=\frac{mg}{۲\sin\theta}$$

$$T=\frac{(۵۳)(۹/۸)}{(۲)(\sin۶۰^\circ)}=۳۰۰N$$

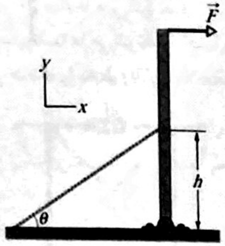
از شرط تعادل انتقالی برای محورهای x و y داریم

$$F_x+T\cos\theta=۰ \qquad F_x+(۳۰۰)(\cos۶۰^\circ)=۰$$
$$F_x=-۱۵۰N \qquad F_y+T\sin\theta-mg=۰$$
$$F_y+(۳۰۰)(\sin۶۰^\circ)-(۵۳)(۹/۸) \qquad F_y=۲۶۰N$$

در نتیجه نیروی F ناشی از لولا برابر است با

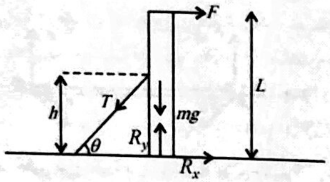
$$\vec F=(-۱۵۰\hat i+۲۶۰\hat j)N$$

۷۳- در شکل ۱۲-۷۷ میلهٔ یکنواختی به وزن ۶۰N و طول ۳/۲m در انتهای پایین لولا شده است و یک نیروی افقی $\vec F$ به بزرگی ۵۰N به انتهای بالایی آن وارد می‌شود. یک کابل که با زمین زاویهٔ $\theta=۲۵^\circ$ می‌سازد و در ارتفاع $h=۲/۰m$ به تیر متصل است آن را به صورت قائم نگهداشته است. مطلوب است تعیین (الف) نیروی کشش در کابل و (ب) نیروی وارد بر تیر از طرف لولا برحسب نماد بردار یکه.



شکل ۱۲-۷۷ مسئلهٔ ۷۳

حل:



(الف) از شرط تعادل دورانی حول لولا داریم

$$FL-Th\sin۶۵^\circ=۰\Rightarrow(۵۰)(۳/۲)-T(۲)\sin۶۵^\circ$$
$$\Rightarrow T=۸۸N$$

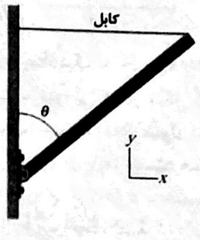
(ب) شرط تعادل انتقالی نیروها در راستای محورهای x و y را در نظر می‌گیریم

$$F+R_x-T\cos۲۵^\circ=۰\Rightarrow۵۰+R_x-(۸۸)\cos۲۵^\circ=۰$$
$$\Rightarrow R_x=۳۰N$$
$$R_y-mg-T\sin۲۵^\circ=۰\Rightarrow R_y-(۶۰)-(۸۸)\sin۳۵^\circ=۰$$
$$\Rightarrow R_y=۹۷N$$

در نتیجه داریم

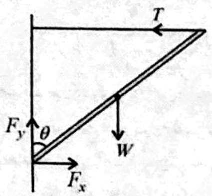
$$\vec R=(۳۰\hat i+۹۷\hat j)N$$

۷۴- در شکل ۱۲-۷۸، تیر یکنواختی به طول ۱۲/۰m به وسیلهٔ یک کابل افقی و لولا در زاویهٔ $\theta=۵۰/۰^\circ$ نگهداشته شده است. کشش در کابل ۴۰۰N است. بر حسب نماد بردار یکه، (الف) نیروی گرانشی روی تیر و (ب) نیروی وارد به تیر از طرف لولا، چقدر است؟



شکل ۱۲-۷۸ مسئلهٔ ۷۴

حل:



(الف) شرط تعادل دورانی را حول لولا می‌نویسیم

$$TL\cos\theta-W\left(\frac{L}{۲}\right)\sin\theta=۰ \qquad T\cos\theta-\frac{۱}{۲}W\sin\theta=۰$$

$$(۴۰۰)\cos۵۰^\circ-\left(\frac{۱}{۲}\right)W\sin۵۰^\circ\Rightarrow W=۶۷۱$$

که برحسب بردار یکه داریم $\vec W=-۶۷۱\hat jN$.

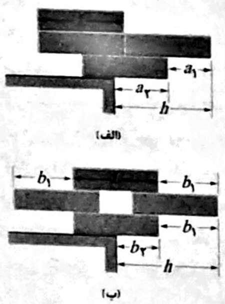
(ب) شرط تعادل انتقالی را در راستای محورهای x و y می‌نویسیم

$$F_x=T=۴۰۰N$$
$$F_y=W=۶۷۱N$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\vec F=(۴۰۰\hat i+۶۷۱\hat j)N$$

۷۵- چهار آجر مشابهٔ یکنواخت هر یک به طول L، همان طور که در شکل ۱۲-۷۹ نشان داده شده است، به دو روش روی میز، روی یکدیگر چیده شده‌اند (با مسئلهٔ ۵۹ مقایسه کنید). می‌خواهیم مقدار جلو رفتگی h در هر دو آرایش بیشینه باشد. فاصله‌های بهینهٔ a_1، a_2، b_1 و b_2 را به دست آورید و برای دو آرایش، h را [redacted] حساب کنید.



شکل ۱۲-۷۹ مسئلهٔ ۷۵

حل: (الف) در حالت حد مرکز جرم آجرهای بالایی روی لبهٔ آجر پایینی قرار دارد. مبدأ محور x را بر لبهٔ میز در نظر می‌گیریم. مرکز جرم دو آجر سمت چپ بالایی روی لبهٔ آجر پایینی قرار دارد. مرکز جرم آجر سمت نیز بالای لبهٔ آجر پایینی قرار دارد، لذا $a_1=\frac{L}{۲}$ و برای به دست آوردن a_2 از تعریف مرکز جرم استفاده می‌کنیم

$$x_{com} = \frac{-(۲M)(L-a_۲) + Ma_۱ + M(a_۲ - L/۲)}{۴M} = ۰ \Rightarrow a_۲ = \frac{۵}{۸}L$$

$$h = a_۱ + a_۲ = \frac{۱}{۲}L + \frac{۵}{۸}L = \frac{۹}{۸}L$$

(ب) ابتدا $b_۱$ را حساب می‌کنیم. برای انجام آن آجر سمت چپ در شکل ب را در نظر می‌گیریم و شرط تعادل دورانی نیروها را حول لبهٔ سمت چپ آجر پایینی می‌نویسیم. برای نیروی F_N (نیروی رو به بالای حاصل از آجر پایینی بر لبهٔ سمت راست آجر سمت چپ میانی) و نیروی وزن Mg داریم

$$Mg\left(b_۱ - \frac{L}{۲}\right) - F_N(L - b_۱) = ۰$$

با توجه به وضعیت متقارنی که وجود دارد به سادگی می‌توان دید F_N برابر با نصف نیروی وزن آجر پایینی است. در نتیجه داریم

$$Mg\left(b_۱ - \frac{L}{۲}\right) - \frac{Mg}{۲}(L - b_۱) = ۰ \Rightarrow b_۱ = \frac{۲}{۳}L$$

حال مرکز جرم مجموعه را در نظر می‌گیریم. با توجه به تقارن موجود سهم مربوط به آجرهای میانی در صورت کسر همدیگر را خنثی می‌کنند لذا آنها را در صورت کسر در نظر نمی‌گیریم

$$x_{com} = \frac{M\left(b_۲ - \frac{L}{۲}\right) + M\left(b_۲ - \frac{L}{۲}\right)}{۴M} = ۰ \Rightarrow b_۲ = \frac{L}{۲}$$

در نتیجه داریم

$$h = b_۱ + b_۲ = \frac{۲}{۳}L + \frac{۱}{۲}L = \frac{۷}{۶}L$$

۷۶- ترازویی از میلهٔ صلبی با جرم ناچیز و کفه‌هایی که از دو سر میله آویزان هستند ساخته شده است. میله روی نقطه‌ای که خارج از مرکز میله قرار دارد، واقع است و می‌تواند آزادانه حول آن بچرخد. این ترازو با قرار دادن وزنه‌های نا مساوی در کفه‌ها، به حال تعادل در می‌آید. هرگاه جرم نامعلوم m را در کفهٔ سمت چپ بگذاریم، برای حفظ تعادل باید جرم $m_۱$ در کفهٔ سمت راست قرار داده شود و به همین ترتیب وقتی جرم m را در کفهٔ سمت راست می‌گذاریم، برای حفظ تعادل باید جرم $m_۲$ در کفهٔ سمت چپ قرار داده شود. نشان دهید که $m = \sqrt{m_۱ m_۲}$.

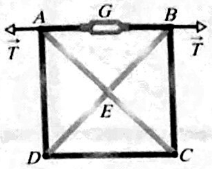
حل: طول بازوهای ترازو را $L_۱$ و $L_۲$ در نظر می‌گیریم. شرط تعادل دورانی را حول تکیه‌گاه برای دو وضعیت می‌نویسیم

$$m_۱ g L_۱ = m g L_۲$$
$$m g L_۱ = m_۲ g L_۲$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم

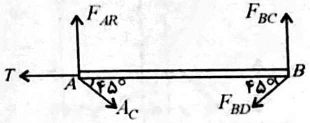
$$\frac{m_۱}{m} = \frac{m}{m_۲} \Rightarrow m = \sqrt{m_۱ m_۲}$$

۷۷- قاب مربعی شکل صلب ۱۲-۸۰ شامل چهار ضلع به صورت میله‌های AB، BC، CD و DA و دو قطر به صورت میله‌های AC و BD است که در E آزادانه از کنار هم گذشته‌اند. به وسیلهٔ پیچ تنظیم G، میلهٔ AB تحت کشش است به طوری که دو انتهای آن تحت تأثیر نیروهای افقی به طرف خارج $\vec{T}$ با بزرگی N ۵۳۵ قرار می‌گیرند. (الف) کدامیک از میله‌های دیگر تحت کشش قرار می‌گیرد؟ مطلوب است تعیین (ب) نیروهایی که باعث کشش در آن میله‌ها می‌شوند و (پ) نیروهایی که موجب تراکم در سایر میله‌ها می‌شوند. (راهنمایی: بررسی تقارن شکل می‌تواند این مسئله را به طور قابل ملاحظه‌ای ساده کند.)



شکل ۱۲-۸۰ مسئلهٔ ۷۷

حل:



شرط تعادل افقی نیروها را در گوشهٔ A می‌نویسیم

$$T = F_{AC} \sin ۴۵° \Rightarrow F_{AC} = \frac{T}{\sin ۴۵°} = \sqrt{۲}T = ۷۵۶/۶\,\text{N}$$

شرط تعادل افقی نیروها در گوشهٔ B به طور مشابه به دست می‌دهد که

$$F_{BD} = \sqrt{۲}T = ۷۵۶/۶\,\text{N}$$

برای میلهٔ پایین داریم

$$F_{CD} = F_{AC} \sin ۴۵° = T = ۵۳۵\,\text{N}$$

یا

$$F_{DC} = F_{BD} \sin ۴۵° = T = ۵۳۵\,\text{N}$$

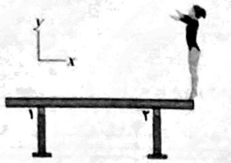
پس می‌توان میلهٔ پایین را تصویر میلهٔ بالا در نظر گرفت به طور مشابه می‌توان نشان داد که میله‌های AD و BC نیز تحت کشش T قرار دارند.

(الف) میله‌های BC و CD و AD تحت کشش هستند.

(ب) بزرگی نیروهایی که باعث کشش در آن میله‌ها می‌شوند برابر است با $T = ۵۳۵$.

(پ) بزرگی نیروهایی که عامل تراکم روی AC و BC هستند برابرند با N ۷۵۶/۶ .

۷۸- یک ورزشکار ژیمناستیک به جرم ۴۶/۰kg در انتهای یک تیر موازنهٔ یکنواخت به صورتی که در شکل ۱۲-۸۱ نشان داده شده، ایستاده است. تیر ۵/۰۰m طول دارد و دارای جرم ۲۵۰kg (صرفنظر از جرم دو پایه) است. هر پایه به فاصلهٔ ۰/۵۴۰m از هر انتهای تیر قرار دارد. برحسب نماد بردار یکه، نیروی وارد به تیر از طرف (الف) پایهٔ ۱ و (ب) پایهٔ ۲ چقدر است؟



شکل ۱۲-۸۱ مسئلهٔ ۷۸

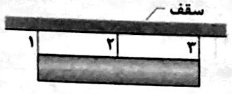
حل: (الف) m را جرم ورزشکار و M را جرم تیر موازنه در نظر می‌گیریم. شرط تعادل دورانی نیروها را حول تکیه‌گاه ۲ می‌نویسیم

$$Mg(۱/۹۶) - mg(۰/۵۴\,\text{m}) - F_۱(۳/۹۲) = ۰$$

که با جاگذاری مقادیر $m = ۴۶\,\text{kg}$ و $M = ۲۵۰\,\text{kg}$ خواهیم داشت $F_۱ = ۱۱۶۳\,\text{N}$ که برحسب بردار یکه برابر است با $\vec{F}_۱ = (۱۱۶۳\,\hat{j})\,\text{N}$.

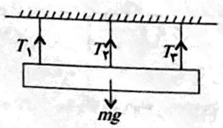
(ب) از شرط تعادل انتقالی نیروها در راستای قائم برابر است با $F_۱ + F_۲ - Mg - mg = ۰$. با جاگذاری مقادیر داده شده خواهیم داشت $F_۲ = ۱۷۳۸\,\text{N}$ که برحسب بردار یکه برابر است با $\vec{F}_۲ = (۱۷۳۸\,\hat{j})\text{N}$.

۷۹- شکل ۱۲-۸۲ یک استوانهٔ افقی به جرم ۳۰۰kg را نشان می‌دهد. سه سیم فولادی که به سقف متصل‌اند استوانه را نگهداشته‌اند. سیمهای ۱ و ۳ به دو انتهای استوانه وصل‌اند، و سیم ۲ به مرکز آن متصل است. هر سیم دارای مساحت سطح مقطع $۱/۰۰ \times ۱۰^{-۶}\,\text{m}^۲$ است. در ابتدا (قبل از اینکه استوانه در این وضعیت قرارگیرد)، سیمهای ۱ و ۳ دارای طول ۲/۰۰۰۰m و سیم ۲ به اندازهٔ ۶/۰۰mm درازتر بوده است. حالا سه سیم کشیده شده‌اند. نیروی کشش در (الف) سیم ۱ و (ب) سیم ۲ چقدر است؟



شکل ۱۲-۸۲ مسئلهٔ ۷۹

حل:



$$L_۱ = L_۳ = ۲\,\text{m}$$
$$L_۲ = ۲ + ۰/۰۰۶ = ۲/۰۰۶\,\text{m}$$
$$\Delta L_۱ = \Delta L_۳ = \Delta L_۲ + ۰/۰۰۶ \qquad (۱)$$
$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}$$

ضمناً داریم
$E = ۲ \times ۱۰^{۱۱}\,\text{N/m}^۲$ (از جدول ۱۲-۱ برای مدولی یانگ فولاد است).

$$\frac{T_۱}{(۲ \times ۱۰^{-۶})} = (۲ \times ۱۰^{۱۱})\frac{\Delta L_۱}{۲} \Rightarrow T_۱ = (۲ \times ۱۰^۵)\Delta L_۱$$

برای $L_۳$ نیز داریم

$$T_۳ = T_۱ = ۲ \times ۱۰^۵\,\Delta L_۱$$

از طرفی می‌توان نوشت

$$\frac{T_۲}{A} = E\frac{\Delta L_۲}{L_۲} \Rightarrow \frac{T_۲}{(۳ \times ۱۰^{-۶})} = (۲ \times ۱۰^{۱۱})\frac{\Delta L_۱ - ۰/۰۰۶}{۲/۰۰۶}$$

که از رابطه (۱) استفاده شده است.

$$T_۲ = (۱/۹۹۴ \times ۱۰^۵)\Delta L_۱ - ۱۱۹۶/۴ \qquad (۲)$$

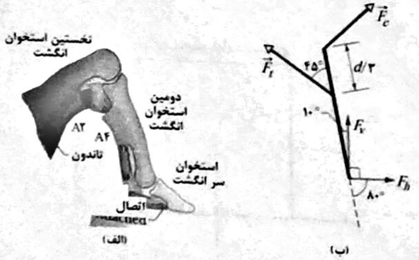
از طرفی از شرط تعادل نیروها داریم

$$T_۱ + T_۲ + T_۳ = mg$$
$$(۲ \times ۱۰^۵)\Delta L_۱ + (۱/۹۹۴ \times ۱۰^۵)\Delta L_۱ - ۱۱۹۶/۴ + (۲ \times ۱۰^۵)\Delta L_۱ = (۳۰۰)(۹/۸)$$
$$\Rightarrow \Delta L_۱ = ۶۹ \times ۱۰^{-۳}\,\text{m}$$

(الف) $T_۱ = T_۳ = (۲ \times ۱۰^۵)(۶/۹ \times ۱۰^{-۳}) = ۱۳۸۰\,\text{N}$

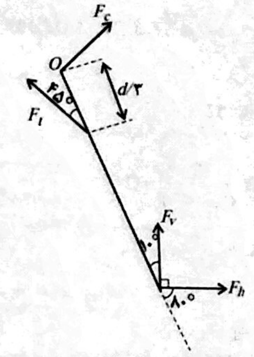
(ب) $T_۲ = (۱/۹۹۴ \times ۱۰^۵)(۶/۹ \times ۱۰^{-۳}) - ۱۱۹۶/۴ = ۱۸۰\,\text{N}$

۸۰- شکل ۱۲-۸۳ الف اجزای یک انگشت صخره‌نورد شکل ۱۲-۴۷ را که با یک دست از لبه آویزان است نشان می‌دهد. تاندونی که از عضله‌ها در ساعد می‌گذرد به استخوان انتهایی انگشت متصل است. در طول مسیر تاندون از میان چند غلاف راهنما که زردپی نامیده می‌شوند می‌گذرد. زردپی $A_۲$ به اولین استخوان انگشت متصل است؛ زردپی $A_۴$ به استخوان دوم انگشت وصل است، برای کشیدن انگشت به کف دست عضله‌های ساعد نظیر ریسمانهای خیمه شب بازی که عروسک را می‌کشند تاندون را از زردپی می‌کشند. در شکل ۱۲-۸۳ ب نمودار ساده شدهٔ استخوان دوم انگشت با طول d آمده است. کشش $\vec{F}_t$ تاندون روی استخوان در نقطه‌ای اثر می‌کند که تاندون در فاصلهٔ $d/۳$ در امتداد استخوان وارد زردپی $A_۴$ می‌شود. اگر مؤلفه‌های نیروی وارد بر هر چهار انگشت صخره‌نورد در شکل ۱۲-۴۷ برابر $F_h = ۱۳/۴\,\text{N}$ و $F_v = ۱۶۲/۲\,\text{N}$ باشد، بزرگی $\vec{F}_t$ چقدر است؟ این نتیجه قابل تحمل است، ولی اگر صخره‌نورد فقط با یک یا دو انگشت خود را نگهدارد، زردپیهای $A_۲$ و $A_۴$ پاره می‌شوند، چیزی که صخره‌نوردان از آن رنج می‌برند.



شکل ۱۲-۸۳ مسئلهٔ ۸۰

حل:



برایند گشتاور نیروهای وارد شده به انگشت را نسبت به نقطهٔ O برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\tau_h = |\vec r_h \times \vec F_h| = dF_h \sin(۸۰°) = d\times ۱۳/۴\times ۰/۹۸۴۸ = ۱۳/۲d$$

$$\tau_v = |\vec r_v \times \vec F_v| = dF_v \sin(۱۷۰°)$$

$$\tau_v = ۲۸/۲d$$

گشتاورهای τ_v و τ_h هم جهت هستند.

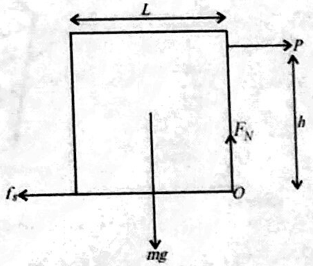
$$\tau_t = |\vec r_t \times \vec F_t| = \frac{d}{۳}\times F_t \sin(۴۵°) = ۰/۲۴\, dF_F$$

با برابر قرار دادن $\tau_v + \tau_h = \tau_t$ بدست می‌آوریم:

$$۴۱/۴d = ۰/۲۴ dF_t \Rightarrow F_t = \frac{۴۱/۴}{۰/۲} = ۲۰۷N$$

۸۱- مکعب یکنواختی به ضلع ۸/۰m روی سطحی افقی در حال سکون است. ضریب اصطکاک ایستایی میان مکعب و سطح برابر μ است. مکعب به وسیلهٔ نیروی افقی $\vec P$ که بر یکی از وجه‌های قائم آن عمود است کشیده می‌شود. نقطه اثر این نیرو ۷/۰cm بالاتر از سطح و از دو یال قائم به یک فاصله است. بزرگی $\vec P$ به تدریج افزایش می‌یابد، برای چه مقدارهایی از μ سرانجام مکعب (الف) شروع به سرخوردن و (ب) شروع به بلندشدن می‌کند؟ (*راهنمایی:* در حالتی که مکعب شروع به بلندشدن روی یک یال می‌کند، نیروی عمود در کجا واقع است؟) **SSM**

حل:



(الف) در آستانهٔ بلند شدن هنوز هم می‌توان از شرایط تعادل استفاده کرد از شرط تعادل دورانی حول گوشهٔ O داریم

$$Ph - mg\left(\frac{L}{۲}\right) = ۰$$

$$(۰/۰۷)P - (۰/۰۴)mg = ۰ \qquad P = \frac{۴}{۷}mg$$

از شرط تعادل انتقالی در آستانه بلند شدن داریم

$$P = f_s = \frac{۴}{۷}mg$$

$$F_N = mg$$

$$f_s = \mu_s F_N \Rightarrow \mu_s = \frac{f_s}{F_N} = \frac{\frac{۴}{۷}mg}{mg} = ۰/۵۷۱$$

پس شرط لغزش $\mu_s < ۰/۵۷۱$ است.

(ب) برای بلند شدن نیز شرط زیر را داریم

$$\mu_s > \frac{P}{mg} \Rightarrow \mu_s > ۰/۵۷۱$$

۸۲- یک میلهٔ استوانه‌ای از آلومینیوم با طول اولیهٔ ۰/۸۰۰۰m و شعاع ۱۰۰۰/۰μm از یک انتها بسته شده است و به وسیلهٔ دستگاه کشش از انتهای دیگر میله موازی با محور استوانه کشیده می‌شود. با فرض اینکه چگالی میله (جرم در واحد حجم) تغییر نکند، مطلوب است تعیین بزرگی نیرویی که دستگاه باید وارد کند تا شعاع به ۹۹۹/۹μm کاهش یابد. (از استقامت تسلیم تجاوز نشده است.)

حل: در فرایند کشیدن چون چگالی ثابت است لذا حجم ثابت می‌ماند

$$V_۱ = V_۲ \Rightarrow A_۱L_۱ = A_۲L_۲$$

$$\pi r_۱^۲ L_۱ = \pi r_۲^۲ L_۲ \Rightarrow L_۲ = \frac{r_۱^۲}{r_۲^۲}L_۱$$

$$\Delta L = L_۲ - L_۱ = \frac{r_۱^۲}{r_۲^۲}L_۱ - L_۱ = L_۱\left(\frac{r_۱^۲}{r_۲^۲} - ۱\right)$$

$$\frac{\Delta L}{L_۲} = \frac{L_۱\left(\frac{r_۱^۲}{r_۲^۲}-۱\right)}{\frac{r_۱^۲}{r_۲^۲}L_۱} = \frac{r_۱^۲ - r_۲^۲}{r_۱^۲} = \frac{(r_۱ - r_۲)(r_۱ + r_۲)}{r_۱^۲}$$

$$\approx \frac{۲r_۱\Delta r}{r_۱^۲} = \frac{۲\Delta r}{r_۱}$$

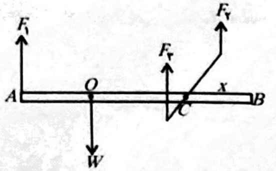
$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L} \Rightarrow F = (\pi r_۱^۲)\left(\frac{۲\Delta r}{r_۱}\right)$$

$$F \approx ۲\pi r_۱ E\Delta r = (۲)(۳/۱۴)(۱۰۰۰\times۱۰^{-۶})(۷۰\times۱۰^{۹})(۱۰۰۰-۹۹۹/۹)\times۱۰^{-۶}$$

$$F = ۴۴N$$

۸۳- سه نفر تیری به طول L را حمل می‌کنند. یکی سر تیر را گرفته است و دو نفر دیگر تیر را روی قطعه چوبی گذاشته‌اند به طوری که وزن تیر به طور مساوی میان هر سه نفر تقسیم شده است. قطعه چوب در چه فاصله‌ای از سر آزاد تیر قرار دارد؟ (از جرم قطعه چوب چشمپوشی کنید.)

حل:



طبق صورت مسئله $F_۱ = F_۲ = F_۳ = \frac{W}{۳}$ است. گشتاور نیروها را حول نقطهٔ C می‌نویسیم

$$F(AC) - W(OC) = ۰$$

$$\frac{W}{۳}(L-x) - W\left(\frac{L}{۲}-x\right) = ۰ \Rightarrow x = ۰/۲۵L \text{ یا } \frac{L}{۴}$$

۸۴- دریچه‌ای مربعی به ضلع ۰/۹۱m و جرم ۱۱ kg در سقفی قرار دارد و در طول یک ضلع لولا شده و دستگیره در ضلع مقابل واقع است. اگر گرانیگاه دریچه ۱۰cm به سمت لولا از مرکز دریچه قرار داشته باشد، بزرگی نیروهای وارد شده به وسیلهٔ دریچه روی (الف) دستگیره و (ب) لولا چقدر است؟

حل: (الف) از شرط تعادل دورانی نیروها حول لولا، نیروی وارد بر دستگیره، F_C، به دست می‌آید

$$F_C(۰/۹۱) - (۱۱)(۹/۸)\left(\frac{۰/۹۱}{۲} - ۱۰\right) = ۰$$

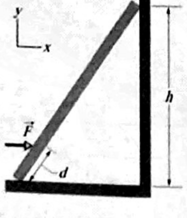
$$F_C = ۴۲N$$

(ب) از شرط تعادل انتقالی نیروها در راستای قائم، نیروی وارد بر لولا، F_h، به دست می‌آید.

$$F_h + F_C - mg = ۰ \qquad F_h + ۴۲ - (۱۱)(۹/۸) = ۰$$

$$F_h = ۶۶N$$

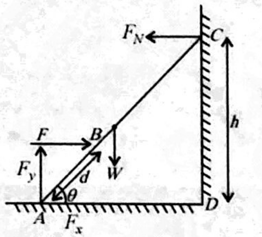
۸۵- نردبان یکنواختی دارای طول ۱۰m و وزن ۲۰۰N است. در شکل ۱۲-۸۴ نردبان در ارتفاع h=۸/۰m بالای زمین به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه دارد. نیروی افقی $\vec F$ در فاصلهٔ d=۲/۰m از پای نردبان (در امتداد نردبان اندازه‌گیری شده است) به آن وارد می‌شود. (الف) اگر F=۵۰N باشد، نیرویی که زمین به نردبان وارد می‌کند، برحسب نماد بردار یکه، چقدر است؟ (ب) اگر F=۱۵۰N باشد، نیرویی که زمین به نردبان وارد می‌کند چقدر است؟ (پ) فرض کنید که ضریب اصطکاک ایستایی میان نردبان و زمین برابر ۰/۳۸ باشد؛ به ازای چه مقدار کمینه‌ای از نیروی F پای نردبان درست شروع به حرکت به سمت دیوار می‌کند. **SSM**



شکل ۱۲-۸۴ مسئلهٔ ۸۵

حل:

$$\sin\theta = \frac{h}{L} = ۰/۸ \qquad \theta = ۵۳°$$



از شرط تعادل دورانی حول نقطهٔ A داریم

$$F_N(L)\sin\theta - W\left(\frac{L}{۲}\right)\cos\theta - F(d)\sin\theta = ۰$$

$$F_N(۱۰)\sin ۵۳° - (۲۰۰)(۵)\cos ۵۳° - (۵۰)(۲)\sin ۵۳ = ۰$$

$$\Rightarrow F_N = ۸۵N$$

(الف) از شرط تعادل انتقالی نیروها در راستای محورهای x و y داریم

$$F_x + F - F_N = ۰ \qquad F_x + ۵۰ - ۸۵ = ۰$$

$$F_x = ۳۵N \qquad F_y - W = ۰$$

$$F_y = W = ۲۰۰N \qquad \vec F_A = (۳۵\hat i + ۲۰۰\hat j)N$$

(ب) روش مشابهی را برای F=۱۵۰N به کار می‌بریم خواهیم داشت F_N=۱۰۵N و F_x=−۴۵N و F_y=۲۰۰N لذا

$$\vec F_A = (-۴۵\hat i + ۲۰۰\hat j)N$$

(پ) $F_x = f_{s,\max} = ۰/۳۸F_y = (۰/۳۸)(۲۰۰) = ۷۶N$

توجه کنید که گفته شده نردبان شروع به حرکت به سمت دیوار کند در نتیجه داریم F_x=−۷۶N .

حال شرط تعادل دورانی را حول نقطهٔ C می‌نویسیم

$$F_x(h) - F_y(AD) + W\left(\frac{AD}{۲}\right) + F(h - d\sin\theta) = ۰$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت F=۱۸۹N .

۸۶- اگر تیر (با سطح مقطع مربع) شکل ۱۲-۷ الف از چوب صنوبر باشد، ضخامت تیر چقدر باید باشد تا تنش تراکمی وارد به آن برابر با $\frac{۱}{۶}$ استقامت نهایی باقی بماند. (به مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۳ نگاه کنید.)

حل: طبق فرض مسئله $\frac{F}{A} = \frac{۱}{۶}S_u$ است و از مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲-۳، F=۷۹۰۰N و از جدول ۱۲-۱ پایداری نهایی چوب صنوبر برابر است با $S_u = ۵۰\times۱۰^{۶}\,N/m^۲$. در نتیجه خواهیم داشت

$$A = \frac{۶F}{S_u} = \frac{۶(۷۹۰۰)}{۵۰\times۱۰^{۶}} = ۹/۴۸\times۱۰^{-۴}\,m^۲$$

$$A = L^۲ \Rightarrow L = \sqrt{A} = \sqrt{۹/۴۸\times۱۰^{-۴}} = ۳/۰۸\times۱۰^{-۲}\,m$$